เอกสารประกอบการสอน

วิชา ระบบดิจิตอลเบื้องต้น (Introduction to Digital System)

รหัส 4121703

บทที่ 2 เลขฐานสองและการเปลี่ยนเลขฐาน

(Binary and change the number)

หลักสูตรระดับปริญญาตรี

พุทธศักราช 2551 (ปรับปรุง 2554)

โดย

จุฑาวุฒิ จันทรมาลี

สาขาวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนดุสิต

บทที่ 2 เลขฐานสองและการเปลี่ยนเลขฐาน
(Binary and change the number)

คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องจักรที่กลไกการทำงานพื้นฐานเป็นสองสถานะ (Binary) คือเปิดวงจรกับปิดวงจร ซึ่งสามารถแทนสถานะดังกล่าวได้ด้วยตัวเลขโดดสองตัวคือ 0 กับ 1 ข้อมูลแบบอื่นของคอมพิวเตอร์จะเกิดจากการประกอบรวมกันของเลข 0 กับ 1 เท่านั้น เราเรียกระบบเลขจำนวนที่ประกอบด้วยตัวเลข 0 กับ 1 เท่านั้นว่า “เลขฐาน 2” ส่วนการนับของมนุษย์โดยปกตินั้น เราจะมีตัวเลขโดดอยู่สิบตัวคือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, และ 9 ซึ่งจะประกอบรวมกันเป็นระบบเลขจำนวนที่เรียกกันว่า “เลขฐาน 10” จะเห็นว่าระบบเลขจำนวนที่ใช้ในคอมพิวเตอร์มีความแตกต่างจากระบบเลขจำนวนที่มนุษย์ใช้กันโดยปกติ ดังนั้นเราจะต้องเรียนรู้ถึงทักษะในการคำนวณของระบบเลขจำนวนทั้งสองแบบรวมถึงวิธีการเปลี่ยนระบบเลขจำนวนไปมา

2.1 บทนำ การใช้งานตัวเลขในชีวิตประจำวัน เราจะใช้เลขฐานสิบในการหาค่าของตัวเลข เราสามารถจะหาได้โดยวิธีการกระจายดังตัวอย่าง เช่น

5862 = 5000 + 800 + 60 + 2

หรือ = $5 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 2 \times 10^0$

= 5862

ตัวคูณแต่ละหลัก (Digit) ที่เป็นเลข 10 ยกกำลัง เราเรียกว่า Weight จากตัวอย่างจะได้ค่า Weight ดังนี้ ค่า

Weight = 10^3 10^2 10^1 10^0

ในระบบเลขฐาน 10 ตัวเลขที่อยู่หลังจุดทศนิยมเรียกว่า เลขทศนิยม จุดทศนิยมนี้เป็นตัวแบ่งส่วนที่เป็นเลขจำนวนเต็ม และส่วนที่เป็นเลขจุดทศนิยมออกจากกัน ค่า Weight ของเลขจุดทศนิยม จะเป็นดังนี้

ค่า Weight = 10^{-1} 10^{-2} 10^{-3} 10^{-4}

ตัวอย่าง จากจำนวน 5862.512

ค่า Weight = 10^3 10^2 10^1 10^0 . 10^{-1} 10^{-2} 10^{-3}

ค่าจำนวน = 5 8 6 2 . 5 1 2

คำนวณค่า = $(5\times10^3) + (8\times10^2) + (6\times10^1) + (2\times10^0) + 5\times10^{-1}) + (1\times10^{-2}) + 2\times10^{-3})$

= 5862.512

จากที่กล่าวมาข้างต้น เป็นการหาเลขฐาน 10 จากการหาผลบวกของค่า Weight คูณด้วยเลขประจำหลัก

2.2 เลขฐานที่ใช้กันกับระบบคอมพิวเตอร์

2.2.1 เลขฐานสอง (binary Number System) ประกอบใช้กับวงจรอิเล็ก -ทรอนิกส์ เพราะวงจรมีแค่เพียง 2 สถานะ นอกจากจะแทนด้วย ∅ และ 1 แล้ว ยังสามารถแทนด้วยสิ่งอื่นได้อีก เช่น เปิดกับปิด mark กับ space สูงกับต่ำ เป็นต้น

ในระบบเลขฐานสิบ แต่ละหลักจะมีค่า Weight เป็นเลข 10 ยกกำลัง แต่ในเลขฐานสองจะมีค่า Weight เป็น 2 ยกกำลัง ดังรูป แสดงค่า Weight ของเลขฐานสอง

2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

ตัวอย่าง เลขฐานสองจำนวน $(110110)_2$ (ในการเขียนเลขฐานต่าง ๆ มักจะเขียนอยู่ในวงเล็บ และมีหมายเลขกำกับอยู่ตอนท้าย เพื่อไม่ให้สับสน)

ค่า Weight = 2^5 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0

เลขฐานสอง = 1 1 0 1 1 0

คำนวณค่า = $(1x2^5) + (1x2^4) + (0x2^3) + 1x2^2) + (1x2^1) + (0x2^0)$ = $(54)_{10}$

สำหรับเลขฐานสองที่มีจุดทศนิยม ค่า Weight ของเลขจุดทศนิยมในเลขฐานสอง เรียงตามลำดับดังต่อไปนี้

2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}
0.5	0.25	0.125	0.0625	0.03129	0.015625

ในระบบเลขฐานสิบ แต่ละหลักเราเรียกว่า หลัก (Digit) แต่ในระบบเลขฐานสองเรียกว่า บิต (bit) ในเลขฐานสองบิตที่มีค่า Weight ต่ำสุด หรือ มีค่านัยสำคัญด้อยที่สุดซึ่งอยู่ทางขวามือ เรียกว่า LSB (Least Significant Bit) และบิตที่มีค่า Weight มากที่สุด หรือมีค่านัยสำคัญมากที่สุด ซึ่งอยู่ทางซ้ายมือสุด เรียกว่า MSB (Most Significant Bit) ส่วนในระบบเลขฐานสอง เรียกว่า LSD (Least Significant Digit) และ MSD (Most Significant Digit)

2.2.2 เลขฐานแปด (Octagonal Number System) ประกอบด้วยเลข 8 ตัว คือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, และ 7 เช่น $(4\ 5\ 6)_8$, $(6\ 4\ 3\ 5)_8$

2.2.3 เลขฐานสิบหก (Hexagonal Number System) ประกอบด้วยเลข 16 ตัว คือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E และ F เช่น $(51F)_{16}$, $(A9E1)_{16}$

2.3 การแปลงเลขฐานของระบบตัวเลข

2.3.1 การแปลงฐานสองเป็นเลขฐานสิบ หลักการ คือการเอาค่า Weight ของทุกบิตที่มีค่าเป็น 1 มาบวกกัน

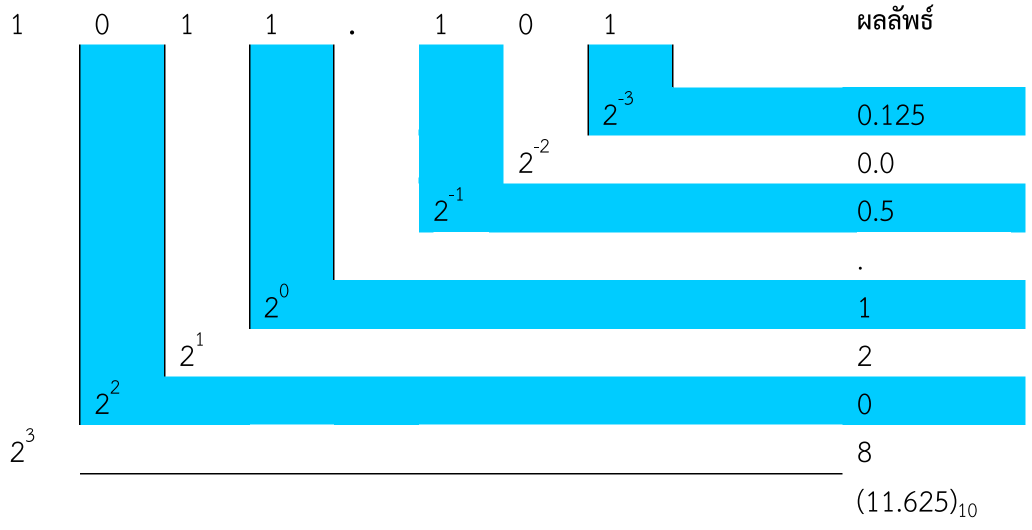
ตัวอย่าง : จงแปลง $(11011101)_2$ ให้เป็นเลขฐานสิบ

$(11011101)_2$ $= (1X2^7) + (1X2^6) + (0X2^5) + (1X2^4) + (1X2^3)+ (1X2^2) + (0X2^1) + (1X2^0)$

$= 128 + 64 + 0 + 16 + 8 + 4 + 0 + 1$

$= (221)_{10}$

ตัวอย่าง จงเปลี่ยน $(1011.101)_2$ เป็นเลขฐานสิบ



∴ $(1011.101)_2$ $= (11.625)_{10}$

2.3.2 การเปลี่ยนเลขฐานสิบเป็นเลขฐานสอง

หลักการ

1.ให้นำเลขฐานสิบเป็นตัวตั้งและนำ 2 มาหาร ได้เศษเท่าไรจะเป็นค่าบิตที่มีนัยสำคัญน้อยที่สุด (LSB)

2.นำผลลัพธ์ที่ได้จากข้อที่ 1 มาตั้งหารด้วย 2 อีกเศษที่จัดจะเป็นบิตถัดไปของเลขฐานสอง

3.ทำเหมือนข้อ 2 ไปเรื่อยๆ จนได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์ เศษที่ได้จะเป็นบิตเลขฐานสองที่มีนัยสำคัญมากที่สุด (MSB)

ตัวอย่าง จงเปลี่ยน $(221)_{10}$ เป็นเลขฐานสอง

2	221	เศษ	1	(LSB)
2	110	เศษ	0	
2	55	เศษ	1	
2	27	เศษ	1	
2	13	เศษ	1	
2	6	เศษ	0	
2	3	เศษ	1	
2	1	เศษ	1	
	0	เศษ	1	(MSB)

$\therefore (221)_{10} = (11011101)_2$

วิธีคิดโดยใช้น้ำหนัก (Weight) ของแต่ละบิต

ตัวอย่าง จงเปลี่ยน $(221)_{10} = (......)_2$

1.นำค่าน้ำหนัก (Weight) มาตั้ง โดย Weight ที่มีค่ามากที่สุดต้องไม่เกินจำนวนที่จะเปลี่ยนดังนี้

128 64 32 16 8 4 2 1

2.เลือกค่า Weight ที่มีค่ามากที่สุด และค่า Weight ตัวอื่น ๆ เมื่อนำมารวมกันแล้วให้ได้เท่ากับจำนวนที่ต้องการ

ค่า Weight	128	64	32	16	8	4	2	1	
เลือก	128 +	64 +	0 +	16 +	8 +	4 +	0 +	1	= 221
ฐานสอง	1	1	0	1	1	1	0	1	

$\therefore (221)_{10} = (11011101)_2$

การเปลี่ยนเลขฐานสิบที่มีจุดทศนิยมเป็นเลขฐานสอง

หลักการ

1. ให้เปลี่ยนเลขจำนวนเต็มหน้าจุดทศนิยมด้วยวิธี ที่กล่าวมาแล้ว

2. ให้นำเลขจุดทศนิยมมาตั้งแล้วคูณด้วย 2 ผลคูณมีค่าน้อยกว่า 1 จะได้ค่าเลขฐานสองเป็น 0 แต่ถ้าผลคูณมีค่ามากกว่า 1 หรือเท่ากับ 1 จะได้ค่าเลขฐานสองเป็น 1

3. ให้นำเลขจุดทศนิยมที่ได้จากผลการคูณใน ② มาตั้งและคูณด้วย 2 และพิจารณาผลลัพธ์เช่นเดียวกับข้อ ② และกระบวนการนี้จะทำต่อไปเรื่อย ๆ จนกว่าผลคูณจะมีค่าเท่ากับ 1 หรือได้ค่าที่แม่นยำเพียงพอแล้ว

ตัวอย่าง จงเปลี่ยน $(0.375)_{10}$ เป็นเลขฐานสอง

ผลการคูณ	ผลของจำนวนเต็ม
0.375 X 2 = 0.75	0
0.75 X 2 = 1.5	1
0.5 X 2 = 1.0	1

ดังนั้น $(0.375)_{10} = (0.011)_2$

ตัวอย่าง จงเปลี่ยน $(12.35)_{10}$ เป็นฐานสอง

1. เปลี่ยน $(12)_{10}$ ให้เป็นเลขฐานสอง

$(12)_{10} = (1100)_2$

2. เปลี่ยน $(0.35)_{10}$ เป็นเลขฐานสอง

ผลการคูณ	ผลของจำนวนเต็ม
0.35 X 2 = 0.7	0
0.7 X 2 = 1.4	1
0.4 X 2 = 0.8	0
0.8 X 2 = 1.6	1
0.6 X 2 = 1.2	1
0.2 X 2 = 0.4	0
0.4 X 2 = 0.8	0
0.8 X 2 = 1.6	1

การเปลี่ยนจะซ้ำกันไปเรื่อย ๆ จะนำมาใช้เพียง 6 บิต

ดังนั้น $(12.35)_{10} = (1100.010110)_2$

2.3.3 การเปลี่ยนเลขฐานแปดเป็นฐานสิบและเลขฐานสิบเป็นฐานแปด

การเปลี่ยนเลขฐานแปดเป็นเลขฐานสิบ

หลักเกณฑ์ : นำค่าน้ำหนัก (Weight)และเลขฐานแปดคูณด้วยเลขประจำหลักแล้วนำผลที่ได้ทุกหลักมารวมกัน

น้ำหนัก Weight ได้แก่ … 8^4 8^3 8^2 8^1 8^0 8^{-1} 8^{-2} 8^{-3}…

ตัวอย่าง $(134)_8 = (…)_{10}$

$(134)_8$ = (1X82) + (3X81) + (4X80)

= 64 + 24 + 4

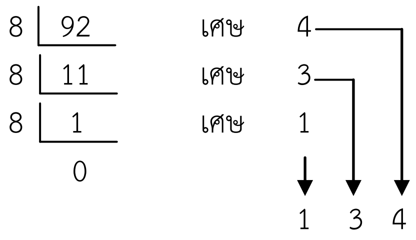
= $(92)_{10}$

ดังนั้น $(134)_8 = (92)_{10}$

การเปลี่ยนเลขฐานสองเป็นเลขฐานแปด

หลักเกณฑ์ : นำเลขฐานสิบเป็นตัวตั้งแล้วหารด้วย 8 เศษที่ได้จากการหารจะเป็นค่าของเลขฐานแปด ทำเช่นเดียวกับการเปลี่ยนเลขฐานสิบเป็นฐานสอง

ตัวอย่าง : $(92)_{10}$ = $(...)_8$

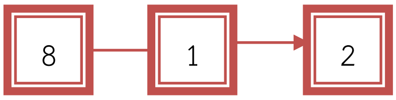


ดังนั้น $(92)_{10} = (134)_8$

2.3.4 การเปลี่ยนเลขฐานแปดเป็นสองและเลขฐานสองเป็นฐานแปด

การเปลี่ยนเลขฐานแปดเป็นเลขฐานสอง

หลักการ : จะต้องใช้เลขฐานสิบเป็นตัวกลางในการเปลี่ยน



ตัวอย่าง $(134)_8 = (...)_2$

1. เปลี่ยนเลขฐานแปดเป็นเลขฐานสิบ

$(134)_8 = (1X8^8) + (3X8^1) + (4X8^0)$

$= (92)_{10}$

2. เปลี่ยนเลขฐานสิบเป็นเลขฐานสอง

$92)_{10} = (...)_2$

Weight = 64 32 16 8 4 2 1

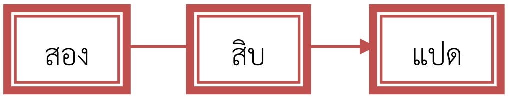
= 64 + 0 + 16 + 8 + 4 + 0 + 0

เลขฐาน 2 = 1 0 1 1 1 0 0

ดังนั้น $(134)_8 = (1011100)_2$

การเปลี่ยนเลขฐานสองเป็นเลขฐานแปด

หลักการ : จะต้องใช้เลขฐานสิบเป็นตัวกลางในการเปลี่ยน



ตัวอย่าง $(1011100)_2 = (...)_8$

1. เปลี่ยนเลขฐานสองเป็นเลขฐานสิบ

$(1011100)_2$ = 64 + 0 + 16 + 8 + 4 + 0 + 0

$= (92)_{10}$

2. เปลี่ยนฐานสิบเป็นเลขฐานแปด

ตัวอย่าง $(92)_{10} = (\ldots)_8$

8 | 92 เศษ 4

8 | 11 เศษ 3

8 | 1 เศษ 1

0

1 3 4

ดังนั้น $(92)_{10} = (134)_8$

ตารางที่ 2.1 แสดงการเปรียบเทียบเลขฐานแปดและเลขฐานสอง

เลขฐานแปด	เลขฐานสอง
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

จากตารางจะเห็นว่าเลขฐานแปดหนึ่งหลักสามารถแทนด้วยเลขฐานสองจำนวน 3 บิต

ตัวอย่าง จงแปลงเลขฐานสองเป็นเลขฐานแปด

$(1011100)_2 = (\ldots)_8$

วิธีทำ : 001 011 100

↓ ↓ ↓

1 3 4

ดังนั้น $(1011100)_2 = (134)_8$

ตัวอย่าง เปลี่ยนเลขฐานแปดเป็นเลขฐานสอง

$(6143)_8 = (\ldots)_2$

วิธีทำ 6 1 4 3

↓ ↓ ↓ ↓

110 001 100 011

ดังนั้น $(6143)_8 = (110001100011)_2$

2.3.5 การเปลี่ยนเลขฐานสิบหกเป็นฐานสิบและเลขฐานสิบเป็นฐานสิบหก

การเปลี่ยนเลขฐานสิบหกเป็นเลขฐานสิบ

หลักการ นำค่าน้ำหนัก (Weight) ของเลขฐานสิบหกคูณด้วยเลขประจำหลักและนำผลที่ได้ทุกหลักมารวมกัน

น้ำหนัก (Weight) ... 16^4 16^3 16^2 16^1 16^0 16^{-1} 16^{-2} 16^{-3} ...

ตัวอย่าง $(6C)_{16}$ = $(...)_{10}$

$(6C)_{16}$ = $(5X16^{1}) + (12X16^{0})$

= 80 + 12

= $(92)_{10}$

ดังนั้น $(6C)_{16}$ = $(92)_{10}$

ตัวอย่าง $(0.3)_{16}$ = $(...)_{10}$

$(0.3)_{16}$ = $3X10^{-1}$

= 3X0.0625

= $(0.1875)_{10}$

ดังนั้น $(0.3)_{16}$ = $(0.1878)_{10}$

การเปลี่ยนเลขฐานสิบเป็นเลขฐานสิบหก

หลักการ : นำเลขฐานสิบมาเป็นตัวตั้งแล้วนำ 16 มาหาร เศษที่ได้จากการหาร จะเป็นค่าเลขฐานสิบหก ทำเช่นเดียวกับการเปลี่ยนเลขฐานสิบเป็นเลขฐานสอง

ตัวอย่าง $(92)_{10}$ = $(...)_{16}$

16 | 92 เศษ 12

16 | 5 เศษ 5

5 C

ดังนั้น $(92)_{10}$ = $(5C)_{16}$

ตัวอย่าง $(0.7875)_{10}$ = $(....)_{16}$

วิธีทำ

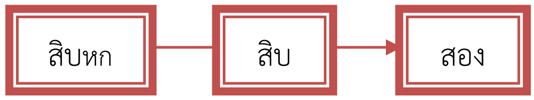
ผลการคูณ	ผลของจำนวนเต็ม
0.7875 X 16 = 12.6	12 = C
0.6 X 16 = 9.6	9
0.6 X 16 = 9.6	9
0.6 X 16 = 9.6	9

ดังนั้น $(0.7875)_{10}$ = $(0.C9)_{16}$

2.3.6 การเปลี่ยนเลขฐานสองเป็นฐานสิบหก และฐานสิบหกเป็นฐานสอง

การเปลี่ยนเลขฐานแปดเป็นเลขฐานสอง

หลักการ : จะต้องใช้เลขฐานสิบเป็นตัวกลาง



ตัวอย่าง $(5C)_{16} = (\ldots)_2$

1. เปลี่ยนเลขฐานสิบหกเป็นเลขฐานสิบ

$(5C)_{16} = (5X16^1) + (12X16^0)$

$= 80 + 12$

$= (92)_{10}$

2. เปลี่ยนเลขฐานสิบเป็นเลขฐานสอง

$(92)_{10} = (\ldots)_2$

Weight = 64 32 16 8 4 2 1

64 + 0 + 16 + 8 + 4 + 0 + 0

เลขฐานสอง = 1 0 1 1 1 0 0

ดังนั้น $(5C)_{16} = (1011100)_2$

การเปลี่ยนเลขฐานสองเป็นเลขฐานสิบหก

หลักการ ต้องใช้เลขฐานสิบเป็นตัวกลาง

ตัวอย่าง $(1011100)_2 = (\ldots)_{16}$

1. เปลี่ยน $(1011100)_2$ เป็นเลขฐานสิบ

$(1011100)_2 = (92)_{10}$

2. เปลี่ยนเลขฐานสิบเป็นเลขฐานสิบหก

16 | 92 เศษ 12 =C

16 | 5 เศษ 5

0

5 C

ดังนั้น $(1011100)_2 = (5C)_{16}$

ตารางที่ 2.2 เปรียบเทียบเลขฐานสิบหกกับเลขฐานสอง

เลขฐานแปด	เลขฐานสอง
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

จากตารางจะเห็นว่า เลขฐานสิบหกหนึ่งหลักสามารถจะแทนด้วยเลขฐานสองจำนวน 4 บิต

ตัวอย่าง จงเปลี่ยน $(1011100)_2$ เป็นเลขฐานสิบหก

วิธีทำ 0101 1100

↓ ↓

5 12

↓ ↓

5 C

ดังนั้น $(1011100)_2 = (5C)_{16}$

ตัวอย่าง จงเปลี่ยน $(1011110111011)_2$ เป็นเลขฐานสิบหก

วิธีทำ 0001 0111 1011 1011

↓ ↓ ↓ ↓

1 7 11 11

↓ ↓ ↓ ↓

1 7 B B

ดังนั้น $(1011110111011)_2 = (17BB)_{16}$

ตัวอย่าง จงเปลี่ยน $(A95)_{16}$ เป็นเลขฐานสอง

วิธีทำ A 9 5

↓ ↓ ↓

1010 1001 0101

ดังนั้น $(A95)_{16} = (101010010101)_2$

สรุป

ระบบจำนวนเลขที่ใช้กับคอมพิวเตอร์ จะทำงานบนพื้นฐานของสองสถานะ (Binary) คือเปิดวงจรกับปิดวงจร ซึ่งสามารถแทนสถานะดังกล่าวได้ด้วยตัวเลขโดดสองตัวคือ 0 กับ 1 เราเรียกระบบเลขจำนวนที่ประกอบด้วยตัวเลข 0 กับ 1 นี้ว่า “เลขฐาน 2” ข้อมูลต่าง ๆ ในระบบคอมพิวเตอร์มักจะไม่ได้มาจากเลขฐานสองเพียงแค่หลักเดียว เพื่อความสะดวกในการเรียกและความกะทัดรัดของจำนวนที่จะต้องใช้เรียก (คงไม่สะดวกนักถ้าต้องมีการเรียกกันว่า เลขฐานสอง 32 หลัก) ดังนั้นจึงได้มีการตั้งชื่อเฉพาะเรียกกลุ่มของเลขฐานสองที่มีจำนวนหลักตั้งแต่หนึ่งหลักขึ้น โดยชื่อต่าง ๆ มีดังนี้คือ บิต, ไบต์, เวิร์ด และดับเบิ้ลเวิร์ด

คำถามทบทวน

2.1 จงแปลงเลขฐานสิบต่อไปนี้ เป็นเลขฐานสี่ (base-4) และเลขฐานห้า (base-5)

a. 10 b. 21

c. 50 d. 67

e. 100

2.2 จงแปลงเลขฐานต่อไปนี้ เป็นเลขฐานสิบ

a. $(24)_5$ b. (3F7)16

c. $(148)_8$ d. $(ABC)_{15}$

2.3 จงแปลงเลขฐานสองต่อไปนี้ เป็นเลขฐานสิบและให้มีทศนิยมเพียง 4 ตำแหน่ง

a. $(0.1111)_2$ b. $(0.11010011)_2$

c. $(001110.111111111)_2$

2.4 จงแปลงเลขฐานสิบต่อไปนี้ เป็นเลขฐานสองและให้มีทศนิยมเพียง 4 ตำแหน่ง

a. $(0.1111)_{10}$ b. $(947.613)_{10}$

c. $(4287.6543)_{10}$

2.5 จงแปลงเลขฐานสิบหกต่อไปนี้ เป็นเลขฐานแปด

a. $(ABCE)_{16}$ b. $(97F)_{16}$

c. $(A0)_{16}$

2.6 จงแปลงเลขฐานแปดต่อไปนี้ เป็นเลขฐานสิบหก

a. $(375)_8$ b. $(054)_8$

c. $(3517)_8$