เอกสารประกอบการสอน

วิชา ระบบดิจิตอลเบื้องต้น (Introduction to Digital System)

รหัส 4121703

บทที่ 3 การคำนวณทางคณิตศาสตร์ (Mathematical calculations)

หลักสูตรระดับปริญญาตรี

พุทธศักราช 2551 (ปรับปรุง 2554)

โดย

จุฑาวุฒิ จันทรมาลี

สาขาวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนดุสิต

บทที่ 3 การคำนวณทางคณิตศาสตร์ (Mathematical calculations)

บทนำ

ในระบบคอมพิวเตอร์ไม่ว่าจะรันโปรแกรมใดๆโดยส่วนใหญ่หลักพื้นฐานจะต้องมีการ คำนวณทางคณิตศาตร์เข้ามาเกี่ยวข้อง ดังนั้นพื้นฐานทางคณิตศาตร์ในระบบดิจิตอลมีความจำเป็นมาก ไม่ว่าจะเป็นการบวก ลบ คูณ หาร เลขฐานที่เกี่ยวข้องที่จำเป็นได้แก่ เลขไบนารี่ หรือเลขฐานสอง และเลขฐานสิบหก เป็นต้น ก่อนอื่น ต้องเข้าใจหลักเกณฑ์ในการบวก ลบ คูณ หารเลขไบนารี่เสียก่อน ดังนี้

3.1 การบวกเลขฐานสอง เลขฐานแปด และเลขฐานสิบหก

หลักการบาก

1. ให้บวกตามปกติเหมือนเลขฐานสิบ
2. ถ้าผลบวกที่ได้มีค่าไม่เกินค่าเลขฐานนั้นๆ ให้ใส่ผลลัพธ์ได้เลย
3. ถ้าผลบวกที่ได้มีค่าเกินค่าเลขฐานนั้นๆ ให้เปลี่ยนผลลัพธ์ที่ได้เป็นเลขฐานนั้นๆ แล้วใส่ LSB หรือ LSD เป็นผลลัพธ์ ส่วนที่เหลือจะเป็นตัวทด
4. กรณีที่มีตัวทดให้เปลี่ยนตัวทดเป็นเลขฐานสิบแล้วจึงเริ่มทำข้อ 1 และทำไปเรื่อยๆ จนหมดทุกหลัก

ตัวอย่างที่ 3.1 $(1101)_2 + (1011)_2 = (.....)_2$

วิธีทำ 1101 +
1011

ตอบ $(11000)_2$

อธิบาย 1. 1+1 $= (2)_{10} = (10)_2$ ใส่ 0 ทดไป 1
2. 0+1+1(ตัวทด) $= (2)_{10} = (10)_2$ ใส่ 0 ทดไป 1
3. 1+0+1(ตัวทด) $= (2)_{10} = (10)_2$ ใส่ 0 ทดไป 1
4. 1+1+1(ตัวทด) $= (3)_{10} = (11)_2$ ใส่ 11

ตัวอย่างที่ 3.2 $(4257)_8 + (5650)_8 = (.....)$

วิธีทำ 4257 +
5650

ตอบ $(12127)_8$

อธิบาย 1. 7+0 $= (7)_{10} = (7)_8$ ใส่ 7
2. 5+5 $= (10)_{10} = (10 - 8 = 2) = (12)_8$ ใส่ 2 ทดไป 1
3. 2+6+1(ตัวทด) $= (9)_{10} = (9 - 8 = 1) = (11)_8$ ใส่ 1 ทดไป 1
4. 4+5+1(ตัวทด) $= (10)_{10} = (10 - 8 = 2) = (12)_8$ ใส่ 12

ตัวอย่างที่ 3.3 $(A9D2)_{16} + (0F57)_{16} = (.....)_{16}$

วิธีทำ A9D2 +
0F57

ตอบ $(B929)_{16}$

อธิบาย 1. 2+7 = $(9)_{10}$ = $(9)_{16}$ ใส่ 9

2. 13+5 = $(18)_{10}$ = (18 – 16 = 2) = $(12)_{16}$ ใส่ 2 ทดไป 1

3. 9+15+1(ตัวทด)= $(25)_{10}$ = (25 – 16 = 9) = $(19)_{16}$ ใส่ 9 ทดไป 1

4. 10+0+1(ตัวทด)= $(11)_{10}$ = $(B)_{16}$ ใส่ B

3.2 การลบเลขฐานสอง เลขฐานแปด เลขฐานสิบหก

หลักการลบ

1. กรณีหลักตัวตั้งเท่ากันหรือมากกว่าตัวลบให้ลบตามปกติเหมือนเลขฐานสิบ
2. กรณีที่ลบไม่ได้ต้องยืมจากหลังถัดไปมาเท่ากับเลขฐานนั้นๆ แล้วบวกกับตัวตั้งในหลักที่จะลบ เช่น เลขฐานสองก็ต้องยืมมา 2 เลขฐานแปดยืมมา 8 และเลขฐานสิบหกก็ยืมมา 16
3. ผลลัพธ์ที่ได้ต้องเป็นจำนวนเลขที่ไม่เกินเลขฐานนั้นๆ
4. หลักที่ถูกยืมมาจะต้องลดลง 1 เสมอ

ตัวอย่างที่ 3.4 $(1101)_2$ - $(1011)_2$ = $(.....)_2$

วิธีทำ 1101 -
<u>1011</u>

ตอบ $(0010)_2$

อธิบาย 1. 1 - 1 = $(0)_2$ ใส่ 0

2. 0 – 1 ยืมบิตถัดไปมา 2 = (0 + 2) - 1 = $(1)_2$ ใส่ 1

3. ถูกยืมไปเหลือ 0 - 0 = $(0)_2$ ใส่ 0

4. 1 - 1 = $(0)_2$ ใส่ 0

ตัวอย่างที่ 3.5 $(4257)_8$ - $(650)_8$ = $(.....)_8$

วิธีทำ 4257 -
<u>650</u>

ตอบ $(3407)_8$

อธิบาย 1. 7 - 0 = $(7)_8$ ใส่ 7

2. 5 - 5 = $(0)_8$ ใส่ 0

3. 2 – 6 ยืมหลักถัดไปมา 8 = (2+8) – 6 = $(4)_8$ ใส่ 4

4. ถูกยืมไปเหลือ 3 – 0 = $(3)_8$ ใส่ 3

ตัวอย่างที่ 3.6 $(A9D2)_{16}$- $(0F57)_{16}$ = $(.....)_{16}$

วิธีทำ A9D2 -
<u>0F57</u>

ตอบ $(9A7B)_{16}$

อธิบาย 1. 2 – 7 ยืมหลักถัดไปมา 16 =(2+16) – 7 = $(11)_{10}$ = $(B)_{16}$ ใส่ B

2. ถูกยืมไปเหลือ $(C)_{16}$ = 12 – 5 = $(7)_{10}$ = $(7)_{16}$ ใส่ 7

3. 9 – $(F)_{16}$ = 9 – 15 ยืมหลักถัดไปเป็น (9+16) - 15 = $(10)_{10}$ = $(A)_{16}$ ใส่ A

4. ถูกยืมไปเหลือ 9 – 0 = $(9)_{16}$ ใส่ 9

3.3 การใช้คอมพลีเมนต์แทนจำนวนลบของเลขฐานต่างๆ

เลขจำนวนลบหรือเลขที่เป็นลบ ของเลขฐานต่างๆ โดยเฉพาะเลขฐานสองที่จะใช้ประมวลผลในเครื่องคอมพิวเตอร์จะต้อง มีวิธีแสดงค่าที่ถูกต้องซึ่งก็มีการคิดค้นระบบที่จะใช้หลายวิธี แต่ขอกล่าวถึงเพียงวิธีเดียว คือ การใช้จำนวน**คอมพลีเมนต์ (complement)** แทนเลข จำนวนลบ เลขจำนวนลบหรือเลขที่มีค่าเป็นลบในที่นี้จะหมายถึงตัวลบ เมื่อนำตัวลบเปลี่ยนเป็นจำนวนคอมพลีเมนต์แล้วนำไปบวกเข้ากับตัวตั้ง ก็จะได้ผลลบที่ถูกต้องออกมา

การคอมพลีเมนต์เลขฐานสิบ มี 2 วิธี คือ 9's complement และ 10's complement
การคอมพลีเมนต์เลขฐานสอง มี 2 วิธี คือ 1's complement และ 2's complement
การคอมพลีเมนต์เลขฐานสิบ มี 2 วิธี คือ 7's complement และ 8's complement
การคอมพลีเมนต์เลขฐานสิบ มี 2 วิธี คือ 15's complement และ 16's complement

ตารางที่ 3.1 แสดงจำนวนคอมพลีเมนต์ของเลขฐานต่างๆ

เลขฐานสิบ		เลขฐานแปด		เลขฐานสิบหก		เลขฐานสอง	
ฐานสิบ	9's com	ฐานแปด	7's com	ฐานสิบหก	15's com	ฐานสอง	1's com
0	9-0= 9	0	7	0	F	0	1
1	9-1= 8	1	6	1	E	1	0
2	9-2= 7	2	5	2	D	-	-
3	9-3= 6	3	4	3	C	-	-
4	9-4= 5	4	3	4	B	-	-
5	9-5= 4	5	2	5	A	-	-
6	9-6= 3	6	1	6	9	-	-
7	9-7= 2	7	0	7	8	-	-
8	9-8= 1	-	-	8	7	-	-
9	9-9= 0	-	-	9	6	-	-
			-	A	5	-	-
			-	B	4	-	-
			-	C	3	-	-
			-	D	2	-	-
			-	E	1	-	-
			-	F	0	-	-

และ 10's complement คือ 9's complement +1
8's complement คือ 7's complement +1
16's complement คือ 15's complement +1
2's complement คือ 1's complement +1

ตัวอย่างที่ 3.7 $(1101)_2$ - $(1011)_2$ = $(.....)_2$ โดยใช้วิธีคอมพลีเมนต์ 1 และ 2

วิธีทำ 1101 +

1's complement ของ $(1011)_2$ = 0100

ตัวทด **1** 0001 +

นำตัวทดมาบวก 1

0010

ตอบ $(0010)_2$

วิธีทำ 1101 +

2's complement ของ $(1011)_2$ = 0101 (1's complement + 1)

ตัวทดไม่พิจารณา **1** 0010

ตอบ $(0010)_2$

ตัวอย่างที่ 3.8 $(4257)_8$ - $(0650)_8$ = $(.....)_8$ โดยใช้วิธีคอมพลีเมนต์ 7 และ 8

วิธีทำ 4257 +

7's complement ของ $(0650)_8$ = 7127

ตัวทด **1** 3406

นำตัวทดมาบวก 1

3407

ตอบ $(3407)_8$

วิธีทำ 4257 +

8's complement ของ $(0650)_8$ = 7130 (7's complement + 1)

ตัวทดไม่พิจารณา **1** 3407

ตอบ $(3407)_8$

ตัวอย่างที่ 3.9 $(A9D2)_{16}$ - $(0F57)_{16}$ = $(.....)_{16}$

วิธีทำ A9D2 +

15's complement ของ $(0F57)_{16}$ = F0A8

ตัวทด **1** 9A7A

นำตัวทดมาบวก 1

9A7B

ตอบ $(9A7B)_{16}$

วิธีทำ A9D2 +

16's complement ของ $(0F57)_{16}$ = F0A9 (15's complement + 1)

ตัวทดไม่พิจารณา **1** 9A7B

ตอบ $(9A7B)_{16}$

3.4 การคูณเลขฐานสอง เลขฐานแปด เลขฐานสิบหก

หลักการคูณ

1. ตั้งคูณตามปกติเหมือนเลขฐานสิบ
2. ถ้าผลคูณมีค่าไม่มากกว่าเลขฐานนั้นๆ ให้ใส่ผลลัพธ์ได้เลย

3. กรณีผลคูณของคู่ใดมีค่ามากกว่าเลขฐานนั้นๆ ผลคูณที่ได้นั้นจะเป็นเลขฐานสิบ ให้เปลี่ยนเป็นเลขฐานนั้นแล้วใส่ผลลัพธ์ และมีตัวทด
4. กรณีมีตัวทด ให้นำผลคูณของหลักถัดไปรวมกับตัวทดผลลัพธ์ที่ได้ แล้วจึงเริ่มทำข้อ 2 และทำไปเรื่อยๆ จนครบทุกคู่
5. นำผลคูณของตัวคูณแต่ละหลักมารวมกัน

ตัวอย่างที่ 3.10 $(1101)_2 \times (101)_2 = (.....)_2$

วิธีทำ

1101 x
101
1101
0000 +
1101
1000001

ตอบ $(1000001)_2$

ตัวอย่างที่ 3.11 $(427)_8 \times (45)_8 = (.....)_8$

วิธีทำ

427 x
45
2563 +
2134
24123

ตอบ $(24123)_8$

ตัวอย่างที่ 3.12 $(2A9)_{16} \times (45)_{16} = (.....)_{16}$

วิธีทำ

2A9 x
45
D4D +
AA4
B78D

ตอบ $(B78D)_{16}$

3.5 การหารเลขฐานสอง เลขฐานแปด เลขฐานสิบหก

หลักการหาร

1. ใช้หลักของการคูณเข้ามาช่วย โดยการเดาผลหารก่อนแล้วนำผลที่ได้มาคูณกับตัวหาร
2. นำผลคูณที่ได้จากข้อ 1 มาลบกับตัวตั้ง โดยใช้หลักการลบของเลขฐานนั้นๆ
3. ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนครบเหมือนการหารเลขฐานสิบ

ตัวอย่างที่ 3.13 $(100001)_2 / (1101)_2 = (.....)_2$

วิธีทำ

```
          101 )1000001(101
               01101
                001101
                  1101
                  0000
```

ตอบ $(101)_2$

ตัวอย่างที่ 3.11 $(2134)_8 / (427)_8 = (.....)_8$

วิธีทำ

```
          427)24123(45
              2134
               2563
               2563
```

ตอบ $(45)_8$

ตัวอย่างที่ 3.12 $(B78D)_{16} / (2A9)_{16} = (.....)_{16}$

วิธีทำ

```
          2A9)B78D( 45
              AA4
               D4D
               D4D
```

ตอบ $(45)_{16}$

อธิบาย 1. ได้ผลลัพธ์ 4 x ตัวหาร 2A9 = AA4

4 x 9 = 36 = $(24)_{16}$ ใส่ 4 ทด 2

4 x A = 40 + 2 = 42 = $(2A)_{16}$ ใส่ A ทด 2

4 x 2 = 8 + 2 = 10 = $(A)_{16}$ ใส่ A

2. B78 - AA4 = D4D

3. ได้ผลลัพธ์ 5 x ตัวหาร 2A9 = D4D

สรุป

ในการการบวก ลบ คูณ หารเลขไบนารี่ จำเป็นที่จะต้องมีความรู้เบื้องต้นในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ เช่น การบวกเลขฐานสอง เลขฐานแปด และเลขฐานสิบหก การลบเลขฐานสอง เลขฐานแปด เลขฐานสิบหก การใช้คอมพลีเมนต์แทนจำนวนลบของเลขฐานต่างๆ การคูณเลขฐานสอง เลขฐานแปด เลขฐานสิบหก การหารเลขฐานสอง เลขฐานแปด เลขฐานสิบหก เป็นต้น

แบบฝึกหัด

1. จงทำเป็นผลสำเร็จ

ก. $(110011)_2 + (11011)_2 = (\ldots\ldots)_2$

ข. $(101110.01)_2 + (1011.11)_2 = (\ldots\ldots)_2$

ค. $(4670)_8 + (754)_8 = (\ldots\ldots)_8$

ง. $(C9F5)_{16} + (1B8)_{16} = (\ldots\ldots)_{16}$

2. จงทำเป็นผลสำเร็จ

ก. $(10100)_2 - (01011)_2 = (\ldots\ldots)_2$

ข. $(10100.101)_2 - (01011.110)_2 = (\ldots\ldots)_2$

ค. $(7235)_8 - (547)_8 = (\ldots\ldots)_8$

ง. $(D582)_{16} - (8B9)_{16} = (\ldots\ldots)_{16}$

3. จงหาผลลัพธ์จากโจทย์ต่อไปนี้ โดยวิธีคอมพลีเมนต์

ก. $(10110)_2 - (01011)_2 = (\ldots\ldots)_2$

ข. $(6135)_8 - (547)_8 = (\ldots\ldots)_8$

ค. $(A572)_{16} - (7B5)_{16} = (\ldots\ldots)_{16}$

ง. $(DAF23)_{16} - (ABC15)_{16} = (\ldots\ldots)_{16}$

4. จงทำเป็นผลสำเร็จ

ก. $(1101011)_2 \times (1010)_2 = (\ldots\ldots)_2$

ข. $(542)_8 \times (47)_8 = (\ldots\ldots)_8$

ค. $(A572)_{16} \times (75)_{16} = (\ldots\ldots)_{16}$

ง. $(B125)_{16} \times (45)_{16} = (\ldots\ldots)_{16}$

5. จงทำเป็นผลสำเร็จ

ก. $(101110)_2 / (1010)_2 = (\ldots\ldots)_2$

ข. $(25375)_8 / (37)_8 = (\ldots\ldots)_8$

ค. $(E284)_{16} / (85)_{16} = (\ldots\ldots)_{16}$