เอกสารประกอบการสอน

วิชา ระบบดิจิตอลเบื้องต้น (Introduction to Digital System)

รหัส 4121703

บทที่ 5 เกตพื้นฐานและพีชคณิตบูลลีน

(Logic Gate & Boolean Algebra)

หลักสูตรระดับปริญญาตรี

พุทธศักราช 2551 (ปรับปรุง 2554)

โดย

จุฑาวุฒิ จันทรมาลี

สาขาวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนดุสิต

บทที่ 5 เกตพื้นฐานและพีชคณิตบูลลีน
(Logic Gate & Boolean Algebra)

5.1 บทนำ

พีชคณิตบูลลีน (Boolean algebra) เป็นทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิเคราห์และออกแบบวงจรลอจิก กำเนิดขึ้นจาก นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ชื่อ จอร์จ บูล (George Boole) 1815-1864 เขาได้เขียนตำราคณิตศาสตร์ เกี่ยวกับทฤษฎีของตรรกะ และความเป็นไปได้ เมื่อ ค.ศ. 1854 ทฤษฎีดังกล่าว คือ พีชคณิตตรรกะ (Logic Algebra) ต่อมาพีชคณิตสาขานี้จึงได้ชื่อตามผู้ที่คิดค้น คือ พิชคณิตบูลลีน (Boolean algebra) หรือ บางทีเรียกว่า พิชคณิตสวิตชิ่ง (Switching Algebra) (Thomas C.Bartee, 1991, 55)

5.2 พื้นฐานของพีชคณิตบูลลีน

ในพิชคณิตที่เรารู้จักกันจะแสดงค่าด้วยจำนวนเลขอาจอยู่ในรูปของเลขจำนวนเต็ม เศษส่วน จำนวนลบ สแควร์รูท ฯลฯ ประกอบกันเป็นสมาการ ตัวอย่างเช่น 10+(20 ÷ 5) x 2 = 28 แต่สำหรับพิชคณิตบูลลีน จะแสดงค่าด้วยสัญญลักษณ์ ที่เป็นสมการเช่นเดียวกัน แต่ค่าเหล่านั้นจะมีเพียง 2 ค่า คือ "จริง (True)" และ "เท็จ (False)" เท่านั้น ให้พิจารณาจากตัวอย่างข้างล่างนี้

ประโยค	ผลลัพธ์
ก. 10 เป็นจำนวนคี่	เท็จ (False)
ข. ดวงอาทิตย์มีแสงสว่างในตัวเอง	จริง (True)
ค. เดือนกันยายนมี 30 วัน	จริง (True)
ง. หนึ่งสัปดาห์มี 5 วัน	เท็จ (False)

พีชคณิตบูลลีน จะเหมือนกับทฤษฎีของสวิตชิ่ง ซึ่งสวิตช์แต่ละอันจะมี เปิด (Open) และปิด(Close) ในดิจิตอลคอมพิวเตอร์ก็เช่นเดียวกัน วงจรลอจิกและหน่วยความจำซึ่งเป็นส่วนประกอบที่สำคัญ ก็มีค่าเป็นไปได้เพียงสองค่า คือ ค่า "0" และ "1" เราจะเรียกมันว่า Logic 0 และ Logic 1 และสามารถที่จะแสดงได้หลายอย่างดังตารางข้างล่างนี้

LOGIC 0	LOGIC 1
เท็จ (False)	จริง (True)
Low	High
Off	On
No	Yes
Open Switch	Close Switch
แทนด้วยแรงดัน 0 - 0.8 V	แทนด้วยแรงดัน 2 - 5 V

5.2.1 กระบวนการพื้นฐานทางตรรกะ (Logic Operation)

ตัวกระทำ (Operator) ที่ทำให้เกิดกระบวนการทางตรรกะมี 3 อย่างคือ AND OR และ NOT ซึ่งจะได้อธิบายตามลำดับ ดังต่อไปนี้

ตัวกระทำ AND (AND operation)

ตัวแปรและค่าคงที่ในวงจรลอจิก จะมีค่าได้เพียงสองค่า คือ false และ true หรือ 0 และ 1 ดังได้กล่าวมาแล้ว ซึ่งตัวแปรแต่ละตัวสามารถที่จะมารวม หรือจัดหมู่ (Combinations) กันให้อยู่ในรูปของนิพจน์ของพิชคณิตบูลลีน ด้วยตัวกระทำ AND OR และ NOT ถ้าตัวแปรทั้งสองถูกกระทำด้วยตัวกระทำ AND และตัวแปรทั้งสองมีค่าเป็นจริง (True) ผลลัพธ์ที่ได้ก็เป็น จริง (True)   ตัวอย่างเช่น

ประโยค	ผลลัพธ์
น้ำมีจุดเยือกแข็งที่ 0 องศาเซ็นเซียส AND น้ำมีจุดเดือดที่ 100 องศาเซ็นเซียส	จริง (True)
ดวงอาทิตย์ร้อน AND ดวงอาทิตย์ให้แสงสว่างในเวลากลางคืน	เท็จ(False)

การใช้ AND เป็นตัวกระทำระหว่างตัวแปรทั้งสอง อาจเรียกว่า การคูณทางลอจิก (Logic Product หรือ Conjunction) โดยใช้สัญญลักษณ์ จุด (.) เป็นเครื่องหมายแทนการกระทำของตัวกระทำ AND เช่น A.B (อ่านว่า A and B) บางที่อาจเขียนโดยละสัญญลักษณ์ จุด เช่น AB (อ่านว่า A and B) ก็ได้

ตัวกระทำ OR (OR operation)

ตัวกระทำ OR เมื่อกระทำกับตัวแปรสองตัว จะเป็นจริงเมื่อ ตัวแปรทั้งสองมีค่าเป็นจริง และ ตัวแปรมีค่าเป็นจริงเพียงหนึ่งตัว   ตัวอย่างเช่น

ประโยค	ผลลัพธ์
น้ำมีจุดเยือกแข็งที่ 0 องศาเซ็นเซียส ORน้ำมีจุดเดือดที่ 100 องศาเซ็นเซียส	จริง (True)
ดวงอาทิตย์ร้อน OR ดวงอาทิตย์ให้แสงสว่างในเวลากลางคืน	จริง (True)
ดวงจันทร์ขึ้นตอนกลางวัน OR ดวงอาทิตย์ขึ้นตอนกลางคืน	เท็จ(False

การใช้ตัวกระทำ OR อาจเรียกว่าเป็น การรวมทางลอจิก (Logic Sum) ใช้สัญญลักษณ์ บวก (+) เป็นเครื่องเช่น A + B (อ่านว่า A or B)

ตัวกระทำ NOT (NOT operation)

ตัวกระทำ NOT เมื่อกระทำกับตัวแปรที่มีค่าเป็นจริง (True) ตัวแปรนั้นจะมีค่าเป็นตรงกันข้าม คือเป็น เท็จ (False) เช่น "10 เป็นเลขจำนวนคี่" มีค่าเป็นเท็จ เมื่อมีตัวกระทำ NOT มากระทำ จะได้" 10 ไม่ใช่เลขจำนวนคี่" จะได้ค่าลอจิกเป็นจริง ใช้สัญญลักษณ์ Bar (¯) หรือ Dash (') เช่น $\overline{A}$ หรือ A' (อ่านว่า NOT A)

5.2.2 บูลลีนฟังชั่นและนิพจน์ของบูลลีน (Boolean Function & Expression)

การนำตัวแปรหลายตัวมาจัดหมู่ (Combination) หรือมากระทำด้วยตัวกระทำ AND, OR และ NOT จะเขียนให้อยู่ในรูปของ บูลลีนฟังชั่น หรืออาจเรียกว่า สวิทชิ่งฟังชั่น ได้ดังนี้

$$f(A,B) = A.\overline{B} + \overline{A}.B$$

$$f(A,B,C) = A + B.\overline{C} + A.\overline{B}.C$$

การเขียนอาจจะเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่ง (นิพจน์ของบูลลีน) ดังนี้

$$X = A.\overline{B} + \overline{A}.B$$

$$Y = A + B.\overline{C} + A.\overline{B}.C$$

X และ Y แทนผลลัพธ์ (Output) ของฟังชั่นซึ่งอาจเป็นจริงหรือเท็จ (0 หรือ 1) ก็ได้ จะเห็นว่ารูปแบบดังกล่าว เป็นแบบของสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเรียกว่า นิพจน์ของบูลลีน 5.2.3 ตารางความจริงและไดอะแกรมแสดงเวลา (Truth Table & Timing Diagram)

ตัวแปรแต่ละตัวในบูลลีนฟังชั่นหรือนิพจน์ของบูลลีน จะมีค่าทางตรรกะได้ 2 ค่า คือ เท็จ (F) และ จริง (T) เมื่อนำตัวแปรมาจัดหมู่หรือมากระทำต่อกัน ด้วยตัวกระทำ จำทำให้มีสถานะแตกต่างกันได้ เท่ากับ 2 ยกกำลัง n (n = จำนวนตัวแปร) เช่น f (A,B) มีตัว 2 ตัว สถานะความแตกต่าง คือ 2n = 2.2 = 4 ส่วน A,B นั้นเป็นตัวแปร เราจะเรียกว่า ตัวป้อนเข้า (Input) เมื่อถูกกระทำจากตัวกระทำ (AND, OR, NOT) ก็จะให้ผลลัพธ์ (Output) ออกมา

เพื่อให้การออกแบบวงจรลอจิก หรือการวิเคราะห์วงจรทำได้ง่ายขึ้น เราจึงเขียนสถานะที่เป็นไปได้ของอินพุตและ เอาท์พุต ออกมาในรูปของตาราง ซึ่งเรียกว่า ตารางความจริง (Truth Table) ดังตัวอย่างข้างล่างนี้

Input		Output
A	B	X
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

a) Truth table

จากตารางความจริง จะเขียนเป็น นิพจน์ของบูลลีน ได้ดังนี้

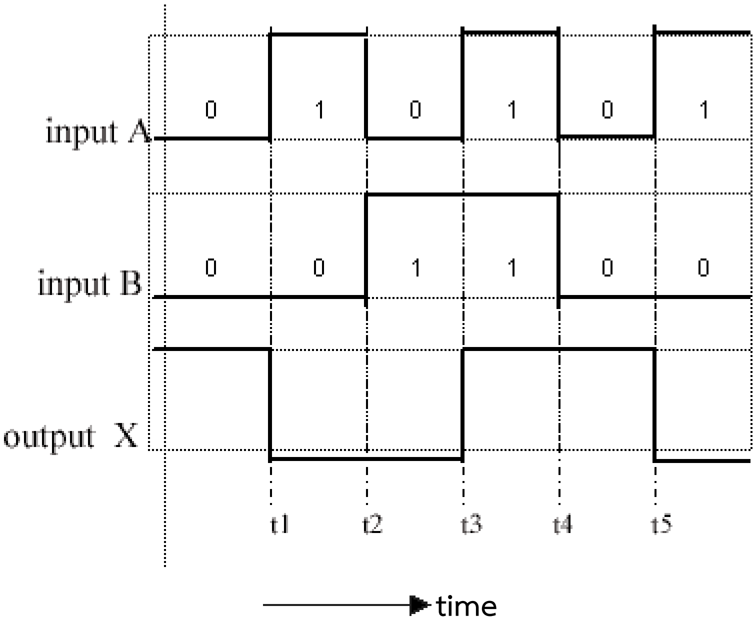
$$X = A.B + \overline{A}.\overline{B}$$

Input		Output
A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

b) Truth table

พิจารณาตารางความจริงข้างบน จะเห็นว่า Output (X) จะเป็นจริง (T หรือ 1) ได้เมื่อ Input A และ B เป็นจริงหรือ A และ B เป็นเท็จทั้งคู่ (A และ B มีค่าทางลอจิกเหมือนกัน) ถ้าให้จริง (T) คือ "1" และเท็จ(F) คือ "0" จะเขียนตารางความจริง ได้ดังตาราง b

ในบางครั้งการออกแบบวงจรลอจิก หรือการวิเคราะห์วงจรอาจทำได้โดยเครื่องมืออีกอย่างหนึ่ง ซึ่งเรียกว่า ไดอะแกรมเวลา (Timing diagram) เขียนโดยยึดหลักเดียวกัน ดังตัวอย่างข้างล่างนี้



ไดอะแกรมเวลา (Timing diagram)

แกนนอนจะเป็นแกนแสดงเวลา (Time) เริ่มต้นจาก t0, t1,t2,.. ไปเรื่อยๆ แต่ละช่วงเวลา จะแสดงสถานะของอินพุตและเอาท์พุตได้เช่นเดียวกันกับตารางความจริง ดังตารางข้างล่างนี้

ช่วงเวลา	input		output
	B	A	X
t0 - t1	0	0	1
t1 - t2	0	1	0
t2 - t3	1	0	0
t3 - t4	1	1	1

ตัวอย่าง จงเขียนตารางความจริงจาก สวิตชิ่งฟังชั่นหรือบูลลีนฟังชั่น ต่อไปนี้

$$f(A,B,C) = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

พิจารณาจากบูลลีนฟังชั่นข้างบน จะได้

1. สถานะความเป็นไปได้ของอินพุตและเอาท์พุต 2n = 2.3 = 8
2. เอาท์พุตจะเป็น "1" เมื่อ เทอมใดเทอมหนึ่งหรือหลายเทอมมีค่าลอจิกเป็น "1" (เพราะทุกเทอมถูกกระทำด้วยตัวกระทำ OR)
   จะได้ตารางความจริงดังนี้

Input			Output
A	B	C	f(A,B,C)

0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

ตัวอย่าง จากตารางความจริงจงเขียนสวิตชิ่งฟังชั่นหรือบูลลีนฟังชั่น f(A,B,C) = X (ให้พิจารณาเฉพาะเทอมที่เป็น "1")

Input			Output	หมายเหตุ
A	B	C	X	
0	0	0	0	
0	0	1	1	*a
0	1	0	1	*b
0	1	1	0	
1	0	0	1	*c
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	*d

a. X = 1 เมื่อ A=0 AND B=0 AND C=1 หรือ $\overline{A}\overline{B}C$ = 1

b. X = 1 เมื่อ A=0 AND B=1 AND C=0 หรือ $\overline{A}B\overline{C}$ = 1

c. X = 1 เมื่อ A=1 AND B=0 AND C=0 หรือ $A\overline{B}\overline{C}$ = 1

d. X = 1 เมื่อ A=1 AND B=1 AND C=1 หรือ ABC = 1

ดังนั้น $f(A,B,C) = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + ABC$

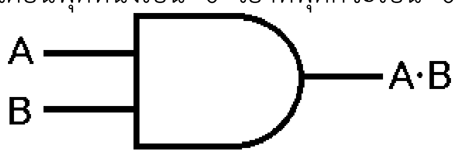
5.3 เกตพื้นฐาน (Basic Logic Gates)

ในทางปฏิบัติอุปกรณ์ที่ใช้แทนตัวกระทำทางตรรกะ เราเรียกว่า เกต (Gate) ซึ่งประกอบขึ้นด้วยวงจรอิเล็กทรอนิกส์ โดยมีความคิดพื้นฐานมาจากวงจรสวิตชิ่ง สำหรับเกตพื้นฐานมี 3 ชนิด ได้แก่ AND , OR และ NOT นิพจน์บูลลีน หรือ ลอจิกฟังชั่น ส่วนใหญ่จะประกอบขึ้นด้วยเกตทั้งสาม จะขอกล่าวรายละเอียดของเกตแต่ละชนิดเกี่ยวกับ สัญญลักษณ์(logic symbol) ตารางความจริง (Truth table) ไดอะแกรมของเวลา (Timing diagram) และนิพจน์บูลลีน (Boolean expression)

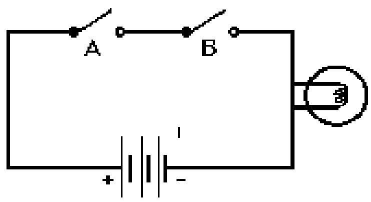
นิพจน์บูลลีน (Boolean expression)

แอนด์เกต (AND gate)

แอนด์เกต (AND gate) เป็นเกตที่มีอินพุตตั้งแต่สองอินพุตขึ้นไป เอาท์พุตของแอนด์เกตจะเป็น "1" ถ้าอินพุตทั้งหมดเป็น "1" ถ้ามีอินพุตใดอินพุตหนึ่งเป็น "0" เอาท์พุตก็จะเป็น "0" ตามไปด้วย



สัญญลักษณ์ของ แอนด์เกต

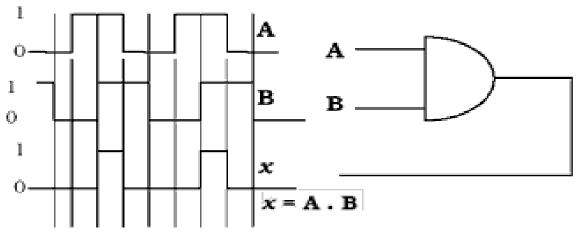


วงจรไฟฟ้าเปรียบเทียบ

ข้างบนเป็นวงจรไฟฟ้าสำหรับเปรียบเทียบการทำงานของแอนด์เกต โดยมี สวิตช์ A และ B ต่ออนุกรมกัน
A เป็นสวิตช์ที่เทียบได้กับอินพุท A ของแอนด์เกต
B เป็นสวิตช์ที่เทียบได้กับอินพุท B ของแอนด์เกต
กำหนดให้เมื่อสวิตช์ต่อวงจร (Close) มีค่าลอจิกเป็น "1" และเมื่อสวิตช์เปิดวงจร (Open) มีค่าลอจิกเป็น "0" มีหลอดไฟมันจะแสดงผลออกมาว่า สว่าง ("1") หรือดับ ("0")
ถ้าสวิตช์ทั้งสองต่อวงจร (Close) คือทั้งสองมีค่าลอจิกเป็น "1" จะทำให้หลอดไฟสว่าง ("1")
ถ้าสวิตช์ตัวหนึ่งตัวใดหรือทั้งสองตัวเปิดวงจร (Open) คือมีค่าลอจิกเป็น "0" จะทำให้หลอดไฟดับ ("0")

Input		Output
A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ตารางความจริง (Truth table)



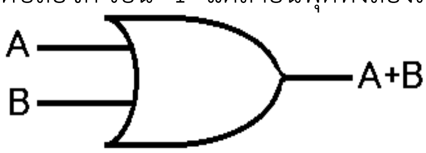
ไดอะแกรมของเวลา (Timing diagram)

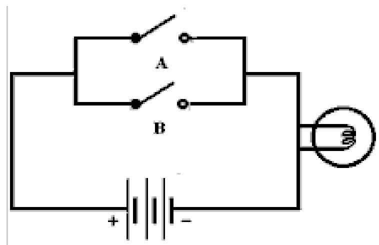
f(A,B) = A.B หรือ X = A.B

นิพจน์บูลลีน (Boolean expression)

ออร์เกต (OR gate)

ออร์เกต (OR gate) เป็นเกตที่มีอินพุตตั้งแต่สองอินพุตขึ้นไป เอาท์พุตของแอนด์เกตจะเป็น "1" ถ้าอินพุตหนึ่งอินพุทใดหรือทั้งสองมีระดับลอจิก เป็น "1" แต่ถ้าอินพุตทั้งสองเป็น "0" เอาท์พุตก็จะเป็น "0" ด้วย





สัญญลักษณ์ของ ออร์เกต

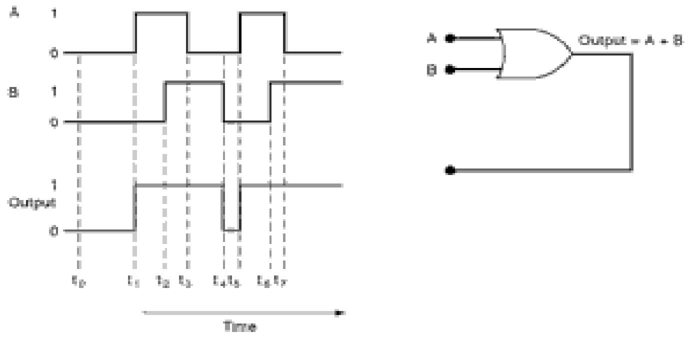
ข้างบนเป็นวงจรไฟฟ้าสำหรับเปรียบเทียบการทำงานของออร์เกต โดยมี สวิตซ์ A และ B ต่อขนานกัน กำหนดให้เมื่อสวิตซ์ต่อวงจร (Close) มีค่าลอจิกเป็น "1" และเมื่อสวิตซ์เปิดวงจร (Open) มีค่าลอจิกเป็น "0" มีหลอดไฟมันจะแสดงผลออกมาว่า สว่าง ("1") หรือดับ ("0")

ถ้าสวิตซ์ตัวหนึ่งตัวใดหรือทั้งสองตัวต่อวงจร (Close) คือมีค่าลอจิกเป็น "1" จะทำให้หลอดไฟสว่าง ("1")

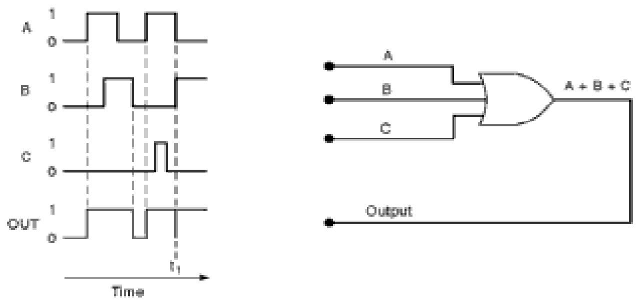
ถ้าสวิตซ์ทั้งสองตัวเปิดวงจร (Open) คือมีค่าลอจิกเป็น "0" จะทำให้หลอดไฟดับ ("0")

Input		Output
A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ตารางความจริง (Truth table) ของออร์เกต 2 อินพุท



ไดอะแกรมของเวลา (Timing diagram) ออร์เกต 2 อินพุต



ไดอะแกรมของเวลา (Timing diagram) ออร์เกต 3 อินพุต

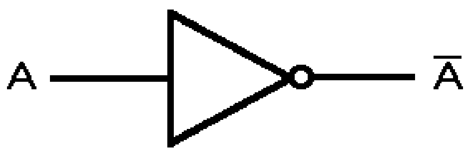
f(A,B) = A+B หรือ X = A+B

f(A,B,C) = A+B+C หรือ X = A+B+C

นิพจน์บูลลีน (Boolean expression)

น๊อตเกต (NOT gate)

น๊อตเกต (NOT gate) เป็นเกตที่มีอินพุตเพียงอันเดียว ดังรูปสัญญลักษณ์ที่แสดงข้างล่างนี้



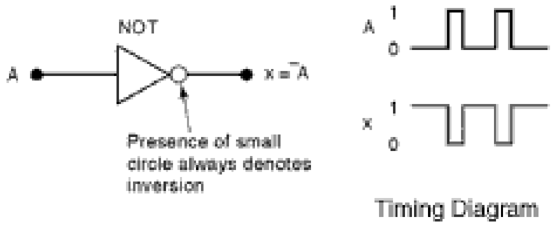
สัญญลักษณ์ของ น๊อตเกต

อินพุตของ น๊อตเกต จะมีค่าลอจิกตรงกันข้าม (Inverted) กับทางเอาท์พุต ถ้าให้อินพุตมีค่าลอจิกเป็น "1" เอาท์พุตก็จะมีค่าลอจิกเป็น "0" แต่ถ้าให้อินพุตมีค่าลอจิกเป็น "0" ค่าลอจิกทางเอาท์พุตก็จะเป็น "1"

$\overline{A}$ อ่านว่า "NOT A" หรือ complement ของ A

Input	Output
A	$X = \overline{A}$
0	1
1	0

ตารางความจริง (Truth table)



$$X = \overline{A}$$

นิพจน์บูลลีน (Boolean expression)

5.4 กฎของพีชคณิตบูลลีน

5.4.1 กฎพื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีทางตรรกะ

ค่าทางลอจิกหรือ Logic Level มีได้เพียง 2 ค่า คือ "0" และ "1" เท่านั้น นั่นคือ

ถ้า A ไม่เท่ากับ "1" นั่นคือ A = "0" และ $\overline{A}$ = "1"

ถ้า A ไม่เท่ากับ "0" นั่นคือ A = "1" และ $\overline{A}$ = "0"

ตัวกระทำ OR (การบวกทางลอจิก)		ตัวกระทำ OR (การบวกทางลอจิก)		ตัวกระทำ NOT (การ Complement หรือการกลับค่า)
0 + 0 = 0 0 + 1 = 1 1 + 0 = 1 1 + 1 = 1		0.0 = 0 0.1 = 0 1.0 = 0 1.0 = 1		$\overline{0}$ = 1 $\overline{1}$ = 0

5.4.2 ทฤษฎีพีชคณิตบูลลีนเกี่ยวกับตัวแปรหนึ่งตัว

จะขอแบ่งทฤษฎีพีชคณิตบูลลีนออกเป็นสองกลุ่มเพื่อสะดวกแก่การจดจำ คือ กลุ่มตัวแปรหนึ่งตัวและตัวแปรหลานตัว กลุ่มตัวแปรหนึ่วตัวมีดังนี้

1	a) A.0 = 0
	b) A+0 = 0

2	a) A.1 = A
	b) A+1 = 1
3	a) A.A = A
	b) A+A = A
4	a) $A.\overline{A} = 0$
	b) $A+\overline{A} = 1$
5	a) $\overline{\overline{A}} = A$

5.4.3 ทฤษฎีพีชคณิตบูลลีนเกี่ยวกับตัวแปรหลายตัว

6	การสลับที่ (Commutative)
	a) A+B = B+A
	b) AB = BA
7	การจัดหมู่ (Associative)
	a) A+(B+C) = (A+B)+C
	b) A(BC) = (AB)C
8	การกระจาย (Distributive)
	a) A(B+C) = AB + AC
	b) A+BC = (A+B)(A+C)
9	การลดทอน (Absorption)
	a) A+AB = A
	b) A(A+B) = A
	c) $AB+A\overline{B} = A$
	d) $(A+B)(A+\overline{B}) = A$
	e) $A+\overline{A}B = A+B$
	f) $A(\overline{A}+B) = AB$
10	เดอมอร์แกน (DeMorgan's Law)
	a) $\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$
	b) $\overline{A.B} = \overline{A}+\overline{B}$

พิสูจน์ 8.b A+BC = (A+B)(A+C)

A + BC = (A+B)(A+C)

= AA+AC+AB+BC ......ผลจากการคูณวงเล็บ

= A + (AC+AB) + BC ......AA=A และจัดกลุ่มใหม่

= [A + A(C+B)] + BC ......ผลจากเอาตัวร่วม A ออก

= A + BC ......9.a) A+AB =A เมื่อมอง B คือ (B+C)

พิสูจน์จากตารางความจริง

A	B	C	A+B	A+C	B.C	A+B.C	(A+B).(A+C)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

จะเห็นว่า 2 ช่อง ด้านขวามือ คือ A+B.C มีค่าระดับของลอจิกเท่ากับ (A+B).(A+C)

พิสูจน์ 9.a A+AB = A

A + AB = A.(1+B) ......เอาตัวร่วม A ออก

= A.1 ......1+B=1

= A

พิสูจน์ 9.b A.(A+B) = A

A.(A + B) = AA+AB .....คูณ A เข้าในวงเล็บ

= A + AB ......A.A=A

= A.(1+B)

= A.1

= A

พิสูจน์จากตารางความจริง

A	B	A.B	A+B	A+AB	A.(A+B)
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

จะเห็นว่า 2 ช่อง ด้านขวามือ คือ A+A.B มีค่าระดับของลอจิกเท่ากับ A.(A+B)

5.4.4 ทฤษฎีของเดอมอร์แกน (DeMorgan's Law)

(a) $\overline{\mathbf{A+B}} = \overline{\mathbf{A}}.\overline{\mathbf{B}}$

(b) $\overline{\mathbf{A.B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$

พิสูจน์ : ในข้อ (a). จะพิสูจน์ว่า $\overline{\mathbf{A}}.\overline{\mathbf{B}}$ เป็นคอมพลีเมนต์ (Complement) ของ (A+B) เมื่อเอา (A+B) มากลับค่าคือใส่ NOT ให้จะได้ $\overline{\mathbf{A+B}}$ซึ่งจะมีค่าเท่ากับนิพจน์บูลลีนในข้อ (a).

กำหนดให้ y = (A+B)

ดังนั้น $\overline{y} = \overline{\mathbf{A}}.\overline{\mathbf{B}}$

เราต้องการจะพิสูจน์ว่า... $y.\overline{y} = 0$

และ... $y+\overline{y} = 1$

$$\begin{aligned} y.\overline{y} &= (A+B).(\overline{A}.\overline{B}) \\ &= (\overline{A}.A).\overline{B} + (\overline{B}.B).\overline{A} \\ &= (0.\overline{B}) + (0.\overline{A}) \\ &= 0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y+\overline{y} &= (A+B) + (\overline{A}.\overline{B}) \\ &= [(A+B)+\overline{A}].[(A+B)+\overline{B}] \\ &= [B+(A+\overline{A})].[A+(B+\overline{B})] \\ &= (B+1).(A+1) \\ &= 1.1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

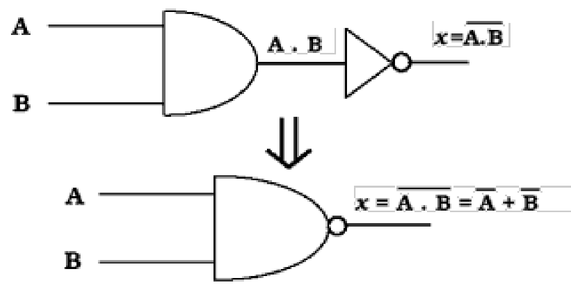
นิพจน์ในข้อ (b) ก็สามารถพิสูจน์ได้ด้วยวิธีเดียว

5.5 NAND/NOR Gates

NAND gate

แนนด์เกต (NAND gate) เป็นเกตที่มีอินพุตตั้งแต่สองอินพุตขึ้นไป เอาท์พุตของแอนด์เกตจะเป็น "0" ถ้าอินพุตทั้งหมดเป็น "1" ถ้ามีอินพุตเป็นอย่างอื่น เอาท์พุตก็จะเป็น "1" ทันที จะเห็นว่าเอาท์พุตจากแนนด์เกตจะเป็น NOT ของ A AND B หรือเป็น คอมพลีเมนต์ของ A.B นั่นเอง

ถ้านำเอา แอนด์เกต มาต่อเพิ่มด้วย น๊อตเกต ดังรูป ก็จะได้คุณสมบัติของแนนด์เกต และสามารถเขียนสัญญลักษณ์ได้ดังรูปถัดไป



ส่วนหัวของสัญญูลักษณ์ ด้านเอาท์พุตจะทำเป็นวงกลม เรียกว่า Invert bubble

A	B	$\overline{A.B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

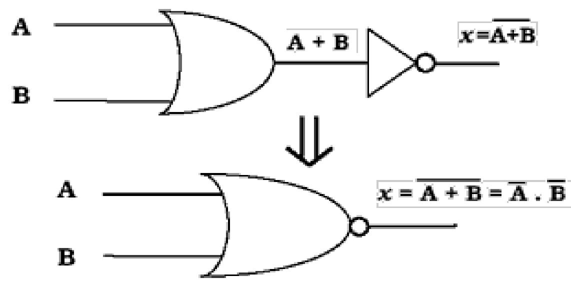
ตารางความจริงของ 2 อินพุตแนนด์เกต

เอาท์พุตจากแนนด์เกตคือ $\overline{A.B}$(อ่านว่า "A Nand B ") เขียนเป็นนิพจน์บูลลีนได้ดังนี้

$$X = \overline{A.B}$$

NOR gate

นอร์เกต (NOR gate) เป็นเกตที่มีอินพุตตั้งแต่สองอินพุตขึ้นไป เอาท์พุตของนอร์เกตจะเป็น "1" ถ้าอินพุตทั้งหมดเป็น "0" ถ้ามีอินพุตเป็นอย่างอื่น เอาท์พุตก็จะเป็น "0" ทันที จะเห็นว่าเอาท์พุตจากนอร์เกตจะเป็น NOT ของ A OR B หรือเป็น คอมพลีเมนต์ของ $\overline{A+B}$ นั่นเอง



สัญญลักษณ์

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

ตารางความจริงของ 2 อินพุตนอร์แนนด์เกต

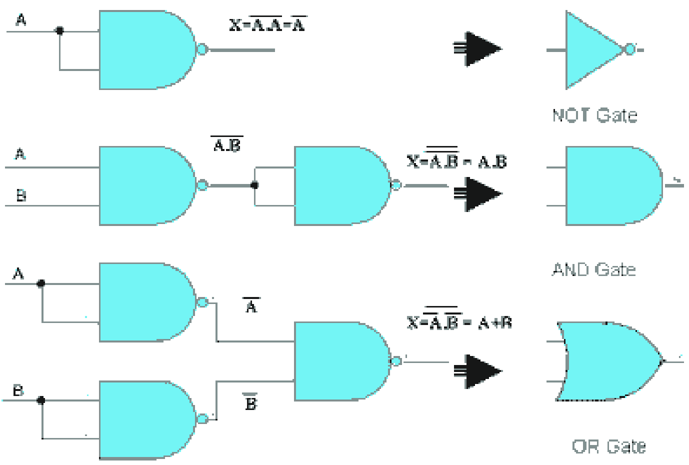
เอาท์พุตจากนอร์เกตคือ $\overline{A+B}$(อ่านว่า "A NOR B ") เขียนเป็นนิพจน์บูลลีนได้ดังนี้

$$X = \overline{A+B}$$

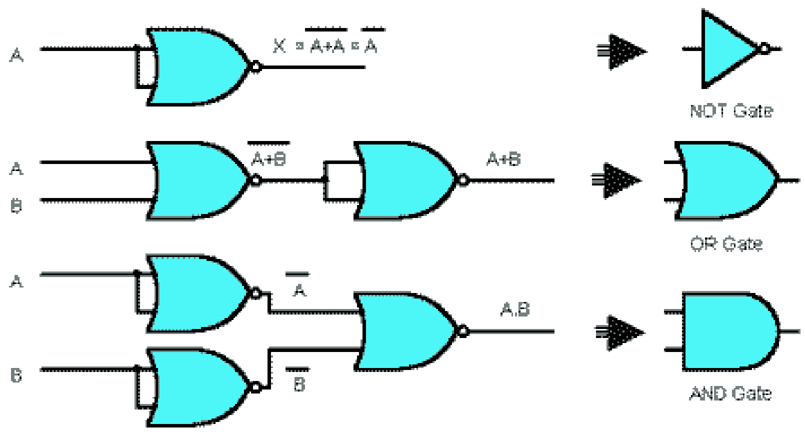
5.6 การใช้เกตทดแทน (Alternate Logic Gate)

1. การประยุกต์ NOR gate และ NAND gate

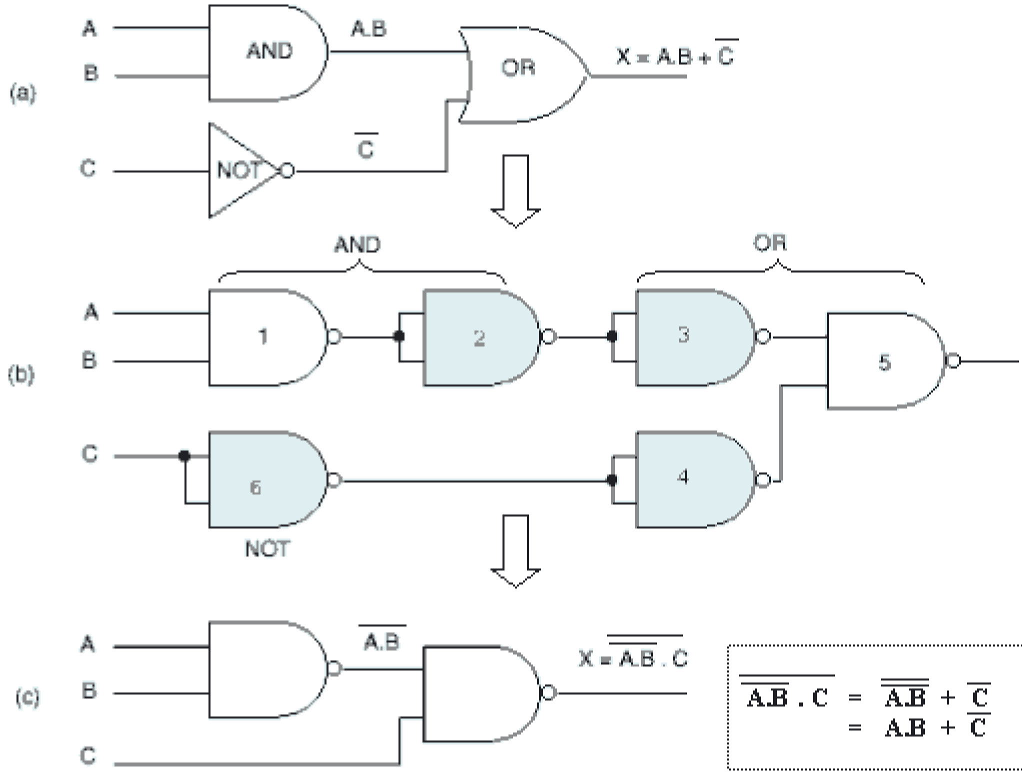
NAND Gate ประยุกต์เป็น NOT, AND และ OR Gate



OR Gate ประยุกต์เป็น NOT, AND และ OR Gate



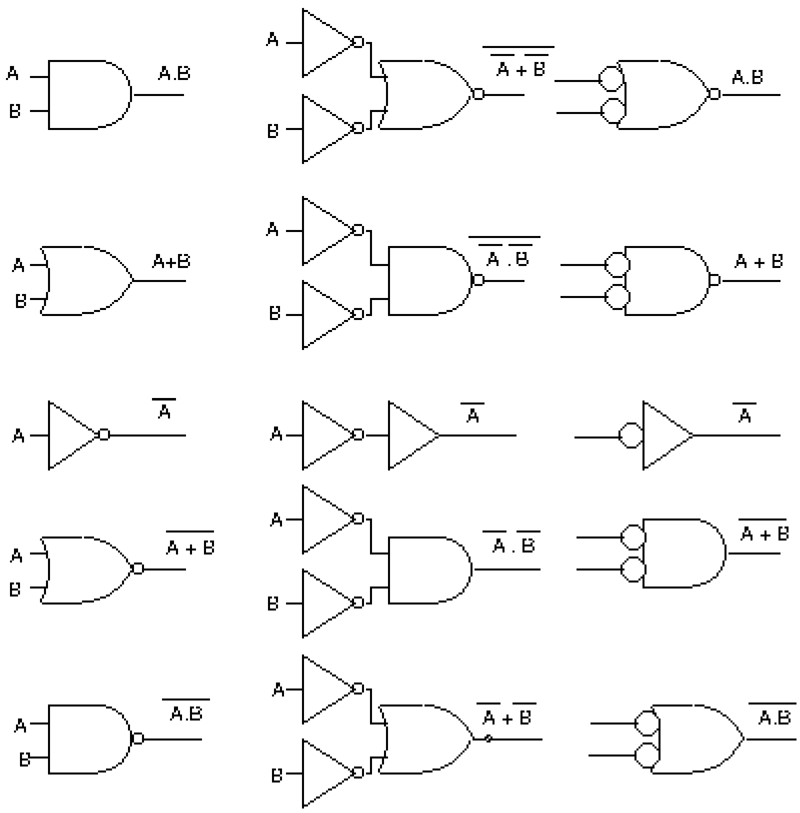
ตัวอย่าง จากวงจรลอจิกข้างล่าง จงเปลี่ยนทั้งหมดโดยใช้ NAND Gate แทน



$$\overline{\overline{A.B}\,.\,C} = \overline{\overline{A.B}} + \overline{C} = A.B + \overline{C}$$

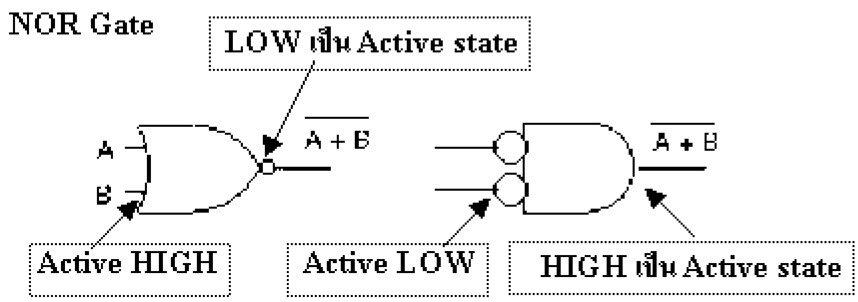
2. ทางเลือกในการใช้เกต

เกตพื้นฐานและ NAND,NOR Gate สามารถประยุกต์ใช้แทนกันได้ ดังรูปสัญลักษณ์ข้างล่างนี้

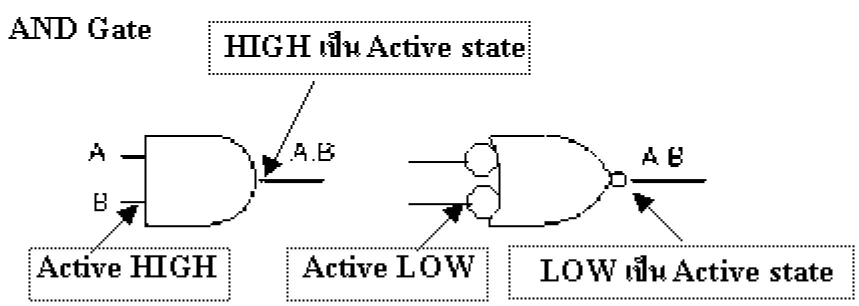


ในการใช้งานเกต จะมีลักษณะของระดับลอจิกอยู่สองอย่าง คือ HIGH Level และ LOW Level สถานะการทำงาน ของเกตเราจะเรียกว่า Active state สำหรับเกตที่มีสัญญาลักษณ์วงกลม (bubble) อยู่ไม่ว่าจะเป็นด้านอินพุตหรือ เอาท์พุตก็ตาม สถานะการทำงาน (Active state) จะเป็น Active LOW และถ้าไม่มีวงกลมสถานะการทำงานเราจะเรียกว่า Active HIGH ดังตัวอย่างข้างล่าง

NOR Gate



AND Gate



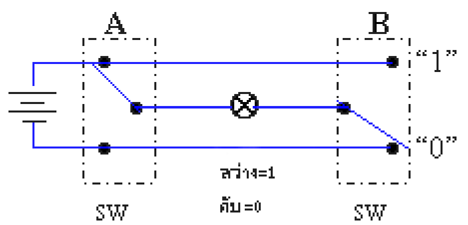
5.7 เกตชนิดพิเศษ

5.7.1 eXclusive-OR Gate (XOR)

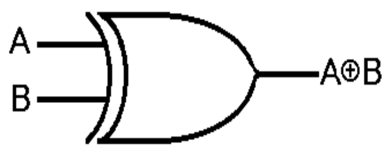
เอ็กซ์คลูซีฟนอร์เกต (XOR gate) เป็นเกตที่มีอินพุตตั้งแต่สองอินพุตขึ้นไป จะให้เอาท์พุตเป็นลอจิก 0 เมื่อ อินพุตมีลอจิกเหมือนกัน และเอาท์พุตจะเป็นลอจิก 1 เมื่อ อินพุตมีลอจิกต่างกัน โดยนำมากระทำกันครั้งละ 2 อินพุต ให้พิจารณาจาก XOR ชนิด 2 อินพุต และ 3 อินพุต จากตารางความจริงข้างล่าง

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ตารางความจริง 2 อินพุต



วงจรไฟฟ้าที่เทียบเท่า



สัญญลักษณ์

นิพจน์บูลลีน (Boolean Expression) : X= $A \oplus B$

เอาท์พุตจาก XOR gate คือ $A \oplus B$ อ่านว่า "A XOR B".

วงจรของ XOR เกต จากเกตพื้นฐาน

จากตารางความจริงข้างบนจะเห็นว่าเอาท์พุตของ XOR คือ X = "1" เมื่อ :-

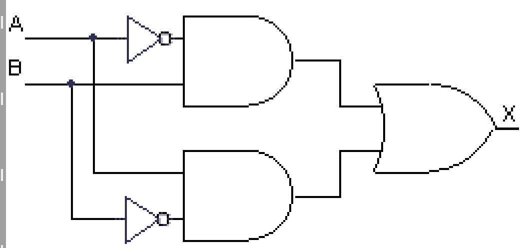
A = "0" และ B = "1" หรือ $\overline{A}$.B = "1"

หรือ A = "1" และ B = "0" หรือ A.$\overline{B}$ = "1"

ดังนั้นจะได้สมการบูลลีน : X = A.$\overline{B}$ +$\overline{A}$.B = $A \oplus B$

A	B	A.$\overline{B}$	$\overline{A}$.B	X
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

ตารางความจริง



วงจรลอจิกจากเกตพื้นฐาน

A	B	C	$A \oplus B \oplus C$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

ตารางความจริงของ XOR gate 3 อินพุต

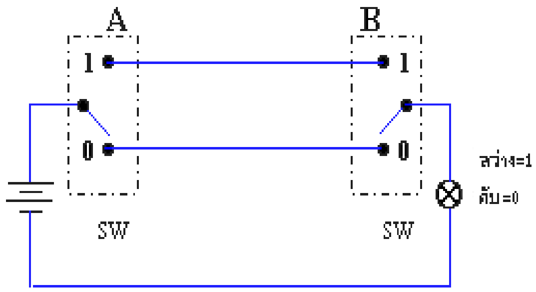
นิพจน์บูลลีน (Boolean Expression) : X= $A \oplus B \oplus C$

5.7.2 eXclusive-NOR Gate (XNOR)

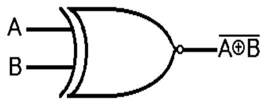
เอ็กซ์คลูซีฟนอร์เกต (XOR gate) เป็นเกตที่มีอินพุตตั้งแต่สองอินพุตขึ้นไป เอาท์พุตจะให้ผลตรงกันข้ามกับ XOR คือ จะให้เอาท์พุตเป็นลอจิก 1 เมื่อ อินพุตมีลอจิกเหมือนกัน และเอาท์พุตจะเป็นลอจิก 0 เมื่อ อินพุตมีลอจิกต่างกัน สำหรับสัญญลักษณ์ก็จะเหมือนกับ XOR แต่จะมีปุ่มกลม (invert bubble) อยู่ที่เอาท์พุต

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ตารางความจริง 2 อินพุต



วงจรไฟฟ้าที่เทียบเท่า



สัญญลักษณ์

นิพจน์บูลลีน (Boolean Expression) : X= $\overline{A \oplus B}$

เอาท์พุตจาก XNOR gate คือ $\overline{A \oplus B}$ อ่านว่า "A XNOR B"

วงจรของ XNOR เกต จากเกตพื้นฐาน

จากตารางความจริงข้างบนจะเห็นว่าเอาท์พุตของ XNOR คือ X = "1" เมื่อ :-

A = "0" และ B = "0" หรือ $\overline{A}.\overline{B}$ = "1"

หรือ A = "1" และ B = "1" หรือ A.B = "1"

ดังนั้นจะได้สมการบูลลีน : X = $\overline{A}.\overline{B}$ +A.B = $\overline{A \oplus B}$

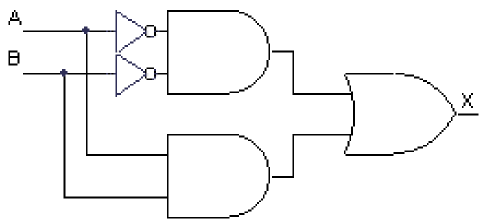
สร้างสมการของ XNOR จาก สมการของ XOR

เอาท์พุตของ XNOR จะเป็นคอมพลีเมนต์กับเอาท์พุตของ XOR ดังนั้นจะได้สมการลอจิกดังนี้

$$
\begin{aligned}
X &= \overline{A.\overline{B} + \overline{A}.B} \\
&= \overline{A.\overline{B}} \,.\, \overline{\overline{A}.B} \\
&= (\overline{A} + B).(A + \overline{B}) \\
&= \overline{A}.A + \overline{A}.\overline{B} + A.B + B.\overline{B} \\
&= \overline{A}.\overline{B} + A.B \\
&= \overline{A \oplus B}
\end{aligned}
$$

A	B	$\overline{A}.\overline{B}$	A.B	X
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

ตารางความจริง



วงจรลอจิกจากเกตพื้นฐาน

A	B	C	$\overline{A \oplus B \oplus C}$
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	1
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

ตารางความจริงของ XNOR gate 3 อินพุต

นิพจน์บูลลีน (Boolean Expression) : X= $\overline{A \oplus B \oplus C}$

5.8 สรุป

ในวงจรดิจิตอลเกตพื้นฐานนับว่าเป็นอุปกรณ์ที่มีความสาคัญในการนาไปประยุกต์ใช้งานทั้งในส่วนของวงจรคอมบิเนชั่น (Combination) และในส่วนของวงจรซีเควนเชียล (Sequential) ซึ่งเราจะเห็นได้จากโครงสร้างพื้นฐานของวงจรดิจิตอลเหล่านั้นมักจะประกอบด้วยเกตพื้นฐานเหล่านี้อยู่ภายในทั้งสิ้น เกตพื้นฐานประกอบด้วย

1. แอนด์ (AND)
2. ออร์ (OR)
3. นอต (NOT)
4. แนนด์ (NAND)
5. นอร์ (NOR)
6. เอกซ์คลูซีพ-ออร์ (EX-OR)
7. เอกซ์คลูซีพ-นอร์ (EX-NOR)

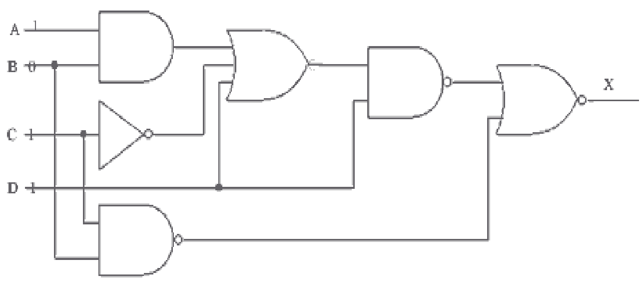
การนาเกตพื้นฐานไปใช้งานควบคุมในระบบดิจิตอลส่วนใหญ่จะต้องมีการประยุกต์ การใช้งานและการขยายอินพุตของเกตให้มีความเหมาะสม รวมทั้งต้องรู้จักเลือกใช้อุปกรณ์สาหรับมาวัดและทดสอบการทางานของเกตหรือไอซีเหล่านั้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ

แบบฝึกหัด

1. จากวงจรลอจิกข้างล่าง

   1.1 จงสร้าง บูลลีนฟังชั่นของ A, B C และD

   1.2 จากอินพุตที่กำหนดให้ จงพิจารณา แล้วใส่ค่าระดับลอจิกที่เอาท์พุตของเกตแต่ละตัว



2. จงเขียนวงจรลอจิกจากสมการลอจิกดังต่อไปนี้

   2.1 $\mathbf{X = \overline{(\overline{A + B}).(\overline{B}\ .\ C)}}$

   2.2 $\mathbf{Y = \overline{(\overline{A.B.C}).(A + B)}}$

3. จงลดทอนสมการลอจิกโดยใช้พิชคณิตบูลลีนจากสมการที่ให้มา

   3.1 $\mathbf{X = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.\overline{B}.C.\overline{D} + \overline{A}.B.C.\overline{D} + A.B.C.\overline{D} + A.\overline{B}.C.\overline{D}}$

   3.2 $\mathbf{Y = A.\overline{BC} + \overline{A}.\overline{B}.C + ABC}$

   3.3 จากข้อ 3.1 และ 3.2 จงเปลี่ยนผลลัพธ์ที่ได้ เป็น NAND Gate

4. จงเขียนวงจรลอจิกจากสมการ $\mathbf{Y = \overline{A.\overline{B}.C + D}}$ และสร้างตารางความจริงจากวงจร

5. จงใช้พีชคณิตบูลลีนพิสูจน์

   5.1 ac + a'bc + = c(a + b)

   5.2 (a + c).(a' + b + c) = ab + c

   5.3 ab + a'c +bc = ab + a'c

6. จงเขียนวงจรลอจิกและตารางความจริง

   6.1 X = a'b + ab'

   6.2 Y = (a + b).(a b)'

7. จงใช้พิชคณิตบูลลีนพิสูจน์ ว่าสมการ ข้อ 6.1 เท่ากับ ข้อ 6.2

8. จงเปลี่ยนวงจรเกตพื้นฐานของ XOR โดยใช้ NAND Gate ทั้งหมด เขียนวงจร