เอกสารประกอบการสอน

วิชา ระบบดิจิตอลเบื้องต้น (Introduction to Digital System)

รหัส 4121703

บทที่ 6 วงจรคอมบิเนชัน

(Combinational Logic Circuits)

หลักสูตรระดับปริญญาตรี

พุทธศักราช 2551 (ปรับปรุง 2554)

โดย

จุฑาวุฒิ จันทรมาลี

สาขาวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนดุสิต

บทที่ 6 วงจรคอมบิเนชัน
(Combinational Logic Circuits)

6.1 บทนำ

วงจรลอจิกจะถูกแบ่งออกเป็นสองแบบ คือ วงจรคอมบิเนชัน (Combinational Circuits) และวงจรซีเควนเชียล (Sequential Circuits) สำหรับในบทนี้กล่าวถึงวงจรคอมบิเนชัน ในรายละเอียดเกี่ยวกับรูปแบบของสมาการลอจิก การวิเคราะห์สมการและวงจรลอจิก การออกแบบวงจรคอมบิเนชัน เทคนิกการลดรูปสมการ และตัวอย่างการออกแบบ วงจรคอมบิเนชัน วงจรคอมบิเนชัน เป็นวงจรที่ประกอบขึ้นด้วยลอจิกเกตต่างๆ ได้แก่ OR, AND, NOT, NOR, NAND และเกตพิเศษที่ได้กล่าวมาแล้ว การสร้างวงจรก็คือการนำเอาเกตต่างๆ มาต่อกันเป็นวงจรตามสมการที่เขียนขึ้น เพื่อให้วงจรสามารถทำงานได้ตามที่เราต้องการ

ผลลัพธ์ทางเอาท์พุตหรือสถานะลอจิกทางเอาท์พุตของวงจรคอมบิเนชัน จะขึ้นอยู่โดยตรงกับสถานะลอจิกทาง อินพุตเท่านั้น หรือสถานะลอจิกทางเอาท์พุตจะเกิดขึ้นจากสถานะลอจิกทางอินพุตในปัจจุบัน นั่นคือจะไม่มี การป้อนกลับ (Feed back) จากทางเอาท์พุต หรือไม่ขึ้นอยู่กับสถานะลอจิกเดิมในอดีต และไม่มีความสามารถใน การจัดเก็บข้อมูล (ไม่มีหน่วยความจำ) ตัวอย่างวงจร เช่น วงจรบวก วงจรถอดรหัส วงจรเข้ารหัส เป็นต้น

รูปแสดงโครงสร้างของวงจรคอมบิเนชัน

6.2 สมการลอจิกและวงจรลอจิก

6.2.1 นิพจน์บูลลีนแบบ Mimterm และ Maxterm

นิพจน์บูลลีน (Boolean expression) หรือสวิตชิงฟังชัน (Switching Function) สามารถที่จะเขียนได้ 2 รูปแบบคือเขียนเป็นเทอมของการคูณ (Product term) ของตัวแปรเราเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า มินเทอม (Minterm) และเขียนเป็นเทอมของการบวก (Sum term) ซึ่งเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า แมกซ์เทอม (Maxterm)

มินเทอม (Minterm) คือการเขียนนิพจน์บูลลีนในรูปผลคูณ ของตัวแปรทุกตัว ตัวแปรแต่ละตัวสามารถจะมีค่าได้สองค่า คือค่าปกติและค่าคอมพลีเมนต์ เช่น A, $\overline{A}$ หรือ B, $\overline{B}$ แต่ในเทอมหรือนิพจน์เดียวกัน จะมีได้เพียงค่าเดียว จำนวนนิพจน์ที่ได้จะขึ้นอยู่กับจำนวนตัวแปร คือ 2^n มินเทอม ถ้า n เป็นจำนวนตัวแปร และค่าปกติจะถูกแทนด้วย "1" ส่วนค่าคอมพลีเมนต์จะถูกแทนด้วย "0" นั่นคือ ถ้า A = "1" จะเป็น A แต่ถ้า A= "0" จะเป็น $\overline{A}$ ดังตัวอย่างในตารางข้างล่าง

เลขฐานสิบ (ลำดับ)	INPUT			Minterm หรือ Product term	สัญลักษณ์ของมินเทอม	Maxterm หรือ Sum term	สัญลักษณ์ของแมกซ์เทอม
	A	B	C				
0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_0	$A+B+C$	M_0
1	0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}C$	m_1	$A+B+\overline{C}$	M_1
2	0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}$	m_2	$A+\overline{B}+C$	M_2
3	0	1	1	$\overline{A}BC$	m_3	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3
4	1	0	0	$A\overline{B}\,\overline{C}$	m_4	$\overline{A}+B+C$	M_4
5	1	0	1	$A\overline{B}C$	m_5	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5
6	1	1	0	$AB\overline{C}$	m_6	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6
7	1	1	1	ABC	m_7	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7

แมกซ์เทอม (Maxterm) คือ การเขียนนิพจน์บูลลีนในรูปผลบวก ของตัวแปรทุกตัว ตัวแปรแต่ละตัวสามารถจะมีค่าได้สองค่าเช่นเดียวกัน คือค่าปกติและค่าคอมพลีเมนต์ เช่น A, $\overline{A}$ หรือ B, $\overline{B}$ แต่ในเทอมหรือนิพจน์เดียวกัน จะมีได้เพียงค่าเดียว จำนวนนิพจน์ที่ได้จะขึ้นอยู่กับจำนวนตัวปร คือ 2^n มินเทอม ถ้า n เป็นจำนวนตัวแปร และค่าปกติจะถูกแทนด้วย "0" ส่วนค่าคอมพลีเมนต์จะถูกแทนด้วย "1" ดังตัวอย่างในตารางข้างบน

6.2.2 การสร้างสมการ จากมินเทอมและแมกซ์เทอม

การสร้างสมการจากมินเทอมจะต้องใช้ มินเทอมที่ทำให้ลอจิกเอาท์พุตเป็น "1" ทุกเทอมนำเอามินเทอมดังกล่าวมารวมกันด้วยตัวกระทำ OR จะได้สมการ ผลรบวกของมินเทอม หรือ Sum Of Mintermใช้เครื่องหมาย Σm แทน Minterm

เลขฐานสิบ (ลำดับ)	Inputs			Output	Mintern เฉพาะ X="1"	Maxterm เฉพาะ X="0"
	A	B	C	X		
0	0	0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	-
1	0	0	1	1	$\overline{A}\,\overline{B}C$	-
2	0	1	0	1	$\overline{A}B\overline{C}$	-
3	0	1	1	0	-	$A+\overline{B}+\overline{C}$
4	1	0	0	1	$A\overline{B}\,\overline{C}$	-
5	1	0	1	0	-	$\overline{A}+B+\overline{C}$
6	1	1	0	0	-	$\overline{A}+\overline{B}+C$
7	1	1	1	0	-	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

ตารางความจริงของวงจรลอจิกชนิด 3 ตัวแปร

พิจารณาจากตารางความจริง

1. ลอจิกเอาท์พุต X = "1" เมื่อ

เทอมที่ (สัญญลักษณ์)	A	B	C	Minterm	อธิบาย
0 (m0)	0	0	0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$X=\overline{A}\overline{B}\overline{C}=1$
1 (m1)	0	0	1	$\overline{A}\overline{B}C$	$X=\overline{A}\overline{B}C=1$
2 (m2)	0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}$	$X=\overline{A}B\overline{C}=1$
4 (m4)	1	0	0	$A\overline{B}\overline{C}$	$X=A\overline{B}\overline{C}=1$

2. นำเอามินเทอมมารวมกันด้วยตัวกระทำ OR เมื่อนำมารวมกันด้วยตัวกระทำ OR ถ้าเทอมใดหรือหลายเทอมมีค่าลอจิกเป็น "1" เอาท์พุต X ก็จะเป็น "1" จึงสามารถจะเขียนสมาการได้ดังนี้

$$X = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$$

3. สมการ ผลรบวกของมิมเทอม หรือ Sum Of Minterm จะเห็นว่าสมการที่ได้จากข้อ 2 เป็นสมการ ที่ได้จากการคูณทางลอจิก (AND) ของตัวแปร แล้วนำมารวมกันทางลอจิก (OR) จึงเรียกสมการนี้ว่า ผลบวกของมินเทอม Sum Of Minterm

4. การเขียนสมการในรูปแบบอื่นสมการที่ได้จากข้อ 2 อาจเขียนในรูปของ สวิตชิ่งฟังชั่นหรือบูลลีนฟังชั่นได้ดังนี้

$$f(A,B,C) = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$$

หรือ $= m_0 + m_1 + m_2 + m_4$

หรือ $= \Sigma m\,(0,1,2,4)$

การสร้างสมการจากแมกซ์เทอม จะต้องใช้แมกซ์เทอมที่ทำให้ลอจิกเอาท์พุตเป็น "0" ทุกเทอมนำเอาแมกซ์เทอมดังกล่าวมารวมกันด้วยตัวกระทำ AND จะได้สมการผลคูณของแมกซ์เทอม หรือ Product Of Maxterm ใช้เครื่องหมาย ΠM แทน Maxterm พิจารณาจากตารางความจริง

1. ลอจิกเอาท์พุต X = "0" เมื่อ

เทอมที่ (สัญญลักษณ์)	A	B	C	Minterm	อธิบาย
3 (M_3)	0	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}$	$X=A+\overline{B}+\overline{C}$ =0
5 (M_5)	1	0	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$	$X=\overline{A}+B+\overline{C}$ =0
6 (M_6)	1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+C$	$X=\overline{A}+\overline{B}+C$ =0
7 (M_7)	1	1	1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	$X=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ =0

2. นำเอามินเทอมมารวมกันด้วยตัวกระทำ AND

เมื่อนำมารวมกันด้วยตัวกระทำ AND ถ้าเทอมใดหรือหลายเทอมมีค่าลอจิกเป็น "0" เอาท์พุต X ก็จะเป็น "0" จึงสามารถจะเขียนสมาการได้ดังนี้

$$X = (A+\overline{B}+\overline{C}) . (\overline{A}+B+\overline{C}) . (\overline{A}+\overline{B}+C) . (\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

3. สมการ ผลคูณของแมกซ์เทอม หรือ Product Of Maxterm

จะเห็นว่าสมการที่ได้จากข้อ 2 เป็นสมการ ที่ได้จากการคูณทางลอจิก (AND) ของตัวแปร แล้วนำมารวมกันทางลอจิก (OR) จึงเรียกสมการนี้ว่า ผลคูณของแมกซ์เทอม หรือ Product Of Maxterm

4. การเขียนสมการในรูปแบบอื่น

สมการที่ได้จากข้อ 2 อาจเขียนในรูปของ สวิตชิ่งฟังชั่นหรือบูลลีนฟังชั่นได้ดังนี้

f(A,B,C) $= (A+\overline{B}+\overline{C}).(\overline{A}+B+\overline{C}).(\overline{A}+\overline{B}+C).(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$

หรือ $= M_3 + M_5 + M_6 + M_7$

หรือ $= \prod M(3,5,6,7)$

รูปแบบมาตรฐานของสมการลอจิก (Standard Forms)

รูปแบบมาตรฐานของสมการลอจิกเป็นการทำสมการที่ได้จากมินเทอมและแมกซ์เทอมโดยให้อยู่ในรูปที่ง่ายและวงจรลอจิกที่ได้จะเป็นชนิด 2 ระดับ (Two-level logic) ซึ่งมีรูปแบบมาตราฐาน 2 รูปแบบคือ

1. สมการผลบวกของผลคูณ หรือ SOP (Sum of Product)

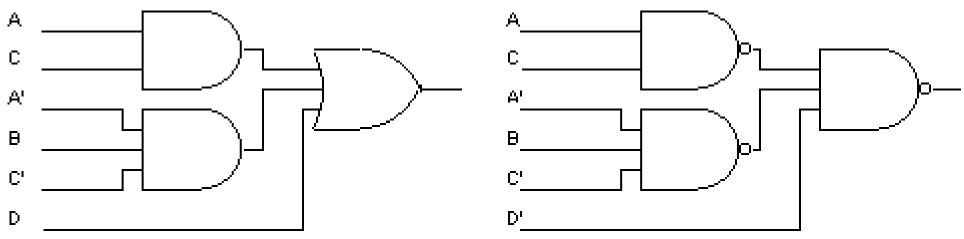
เป็นสมการที่ประกอบด้วย ตัวแปรปกติ (Uncomplement) หรือตัวแปรคอมพลีเมนต์ (Complement) ที่คูณทางลอจิก หรือ AND กัน และนำแต่ละเทอมมารวมกันทางลอจิก หรือ OR กัน ดังตัวอย่าง

- $\overline{A}\overline{B}C$ + A.B
- A.C+ $\overline{A}B\overline{C}$ + D
- A + $\overline{B}$C
- $xyz+\overline{x}y\overline{z}+\overline{y}$

สำหรับสมการ SOP ยังสามารถที่จะใช้ NAND Gate แทนเกตที่ใช้ในวงจรได้ทั้งหมด ดังตัวอย่างข้างล่างนี้

สมการ $Q=AB+\overline{A}B\overline{C}+D=\overline{\overline{(AB+\overline{A}B\overline{C}+D)}} = \overline{(\overline{AB})(\overline{\overline{A}B\overline{C}})(\overline{D})}$

$AB+\overline{A}B\overline{C}+D$ $\overline{(\overline{AB})(\overline{\overline{A}B\overline{C}})(\overline{D})}$



วงจร 2 ระดับ (Two-Level)

2. สมการผลคูณของผลบวก หรือ POS (Product of Sum)

เป็นสมการที่ประกอบด้วย ตัวแปรปกติ (Uncomplement) หรือตัวแปรคอมพลีเมนต์ (Complement) ที่บวกทางลอจิก หรือ OR กัน และนำแต่ละเทอมมาคูณกันทางลอจิก หรือ AND กัน ดังตัวอย่าง

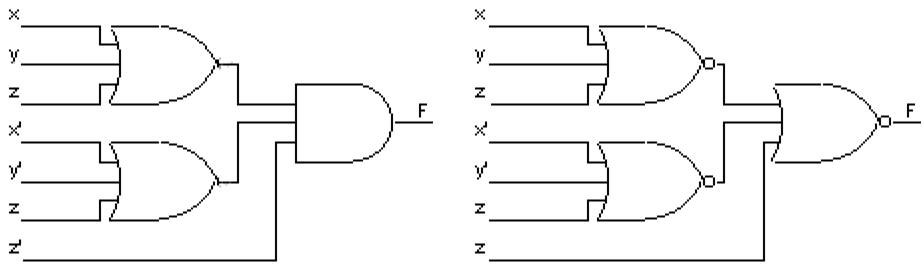
- $(\mathbf{A}+\overline{\mathbf{B}}+\overline{\mathbf{C}})(A+B)$
- $(\overline{A}+B)(A+\overline{B})$
- $D(\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}}+\mathbf{C})$
- $(x+y+z)(\overline{x}+\overline{y}+z)\overline{z}$

สำหรับสมการ POS ยังสามารถที่จะใช้ NOR Gate แทนเกตที่ใช้ในวงจรได้ทั้งหมด ดังตัวอย่างข้างล่างนี้

$$F=(x+y+z)(\overline{x}+\overline{y}+z)\overline{z} = \overline{\overline{(x+y+z)(\overline{x}+\overline{y}+z)\overline{z}}}$$

$$= \overline{\overline{(x+y+z)}+\overline{(\overline{x}+\overline{y}+z)}+(z)}$$

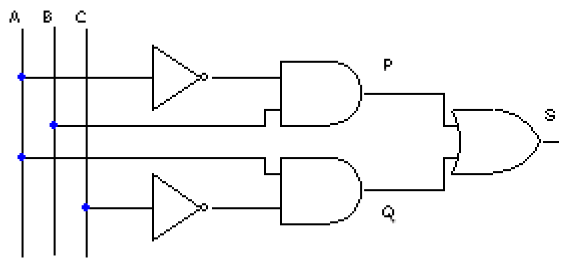
$(x+y+z)(\overline{x}+\overline{y}+z)\overline{z}$ $\qquad$ $\overline{\overline{(x+y+z)}+\overline{(\overline{x}+\overline{y}+z)}+(z)}$



วงจร Two-Level

6.2.3 การเขียนสมการลอจิกจากวงจรลอจิก (การวิเคราะห์วงจรลอจิก)

เมื่อมีวงจรลอจิกแล้วเราสามารถที่จะสร้างสมการได้อย่างง่ายดาย โดยเขียนนิพจน์บูลลีนที่เอาท์พุตของลอจิกเกต ในวงจรทุกเกตและเริ่มต้นจากอินพุตไปเอาท์พุต ดังตังอย่าง

วงจรลอจิก	นิพจน์จากเอาท์พุตของลอจิกเกต
	$P=\overline{A}B$ $Q=A\overline{C}$ แต่ S = P +Q
ดังนั้นจะได้สมการ : $S=\overline{A}B+A\overline{C}$	

นิพจน์บูลลีนและการหาค่าระดับลอจิกเอาท์พุต

จากสมการ $S=\overline{A}B+A\overline{C}$ ถ้าต้องการจะหาค่าระดับลอจิกเอาท์พุต (S) จะสามารถหาได้โดยกำหนดค่าระดับลอจิกอินพุตทุกอินพุต แล้วแทนค่าลงในสมการ เช่น ถ้า A ="1" ,B = "0" และ C = "0" จงหาค่าระดับลอจิกเอาท์พุต (S)

$S = \overline{A}B + A\overline{C}$

= 0.0 + 1.1

= 0 + 1

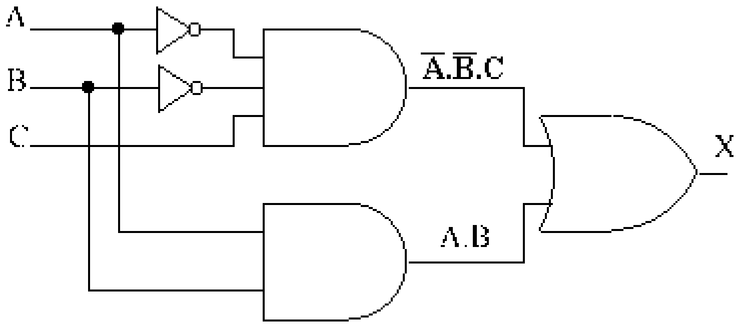
= 1

6.2.4 การเขียนวงจรลอจิก

การเขียนวงจรลอจิกจะต้องเขียนจากสมการลอจิกหรือนิพจน์บูลลีนหรือสวิตซิ่งฟังชัน โดยใช้พิจารณาสมการดังนี้

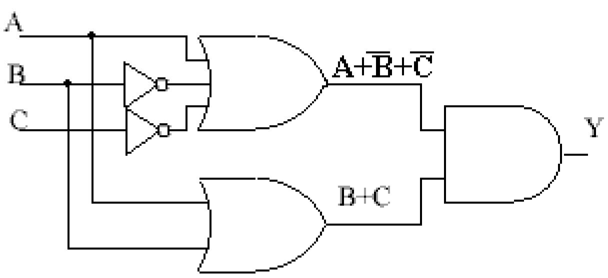
1.	**กรณีที่เป็นสมการ SOP ให้ใช้ AND แทน มินเทอม (Minterm) จำนวนอินพุตเท่ากับจำนวนตัวแปรที่ประกอบเป็นมินเทอมนั้น ๆ**
2.	กรณีที่เป็นสมการ POS ให้ใช้ OR แทน แมกซ์เทอม (Maxterm) จำนวนอินพุตเท่ากับจำนวนตัวแปรที่ประกอบเป็นแมกซ์เทอมนั้น ๆ
3.	กรณีเป็นสมการแบบผสมจะต้องใช้ลอจิกเกตแทนเทอมที่อยู่ในวงเล็บก่อนซึ่งอาจเป็นมินเทอม หรือ แมกซ์เทอม โดยใช้กฎเกณฑ์ตามข้อ 1 และ ข้อ 2 ตามลำดับ
4.	เทอมที่คูณกันให้ใช้ AND เกต
5.	เทอมที่บวกกันให้ใช้ OR เกต
6.	พิจารณาตัวแปรที่เป็นคอมพลีเมนต์ให้ใช้ NOT เกตก่อน
7.	พิจารณามินเทอม หรือ แมกซ์เทอมที่เป็นคอมพลีเมนต์ จะต้องใช้ NAND หรือ NOR เกตแทนตามลำดับ

ตัวอย่าง 6.1 สมการ X = $\overline{A}\overline{B}C$ + A.B



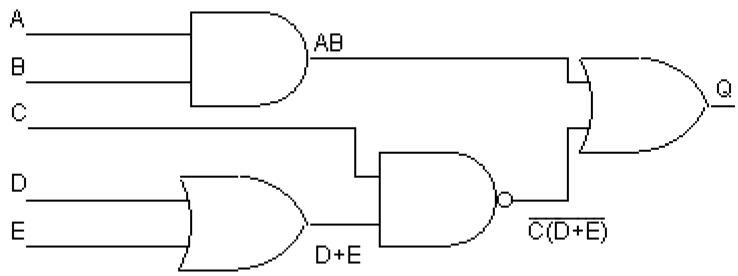
วงจร 2 ระดับ (Two-Level) สมการแบบ SOP

ตัวอย่าง 6.2 สมการ Y = ($A+\overline{B}+\overline{C}$)(A + B)



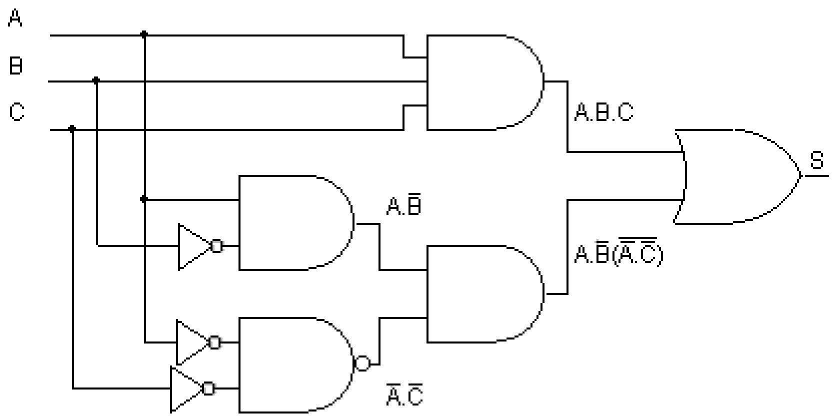
วงจร 2 ระดับ (Two-Level) : สมการแบบ POS

ตัวอย่าง 6.3 สมการ $Q = AB + \overline{C(D+E)}$



วงจร 3 ระดับ (Three-Level) สมการแบบผสม

ตัวอย่าง 6.4 สมการ $S = ABC + A\overline{B}(\overline{\overline{A}\overline{C}})$



วงจร 3 ระดับ (Three-Level) สมการแบบผสม

6.3 การออกแบบวงจรคอมบิเนชัน

การออกแบบวงจรลอจิก จะเริ่มต้นจากสิ่งที่ต้องการหรือโจทย์ปัญหา ซึ่งจะประกอบด้วยรายละเอียดที่เป็นเงื่อนไข ต่าง ๆ ของระบบ ผู้ออกแบบจะต้องวิเคราะห์โจทย์ให้ถูกต้อง แล้วจึงทำตามขั้นตอนจนถึงขั้นตอนสุดท้าย คือ สร้างวงจรแล้วทดสอบวงจร ตามที่ได้ออกแบบไว้ ขั้นตอนการออกแบบวงจรลอจิกมีดังนี้

1. วิเคราะห์สิ่งที่ต้องการหรือโจทย์ปัญหา (Problem Analysis)
2. สร้างตารางความจริง (Truth Table Construction)
3. เขียนสมการลอจิก (Logic Equations Written)
4. ลดรูปสมการ (Equations Simplified)
5. เขียนวงจรลอจิก (Logic Diagram Drawn)
6. สร้างและทดสอบวงจร (Logic Circuit Built & Test)

ตัวอย่าง 6.5 เครื่องจักรในโรงงานแห่งหนึ่ง จะหยุดทำงาน (Off) เมื่อตัวเซ็นเซอร์ (Sensor) 2 ใน 3 ตัว หรือทั้ง 3 ตัวมีค่าทางลอจิกเป็น HIGH จงออกแบบวงจร เซ็นเซอร์ (Sensor) ที่จะใช้ควบคุมเครื่องจักรเครื่องนี้

ขั้นที่ 1 วิเคราะห์สิ่งที่ต้องการหรือโจทย์ปัญหา

อินพุต คือตัวเซ็นเซอร์ (Sensor) มี 3 อินพุต สมมุติให้เป็น A, B และ C

เอาท์พุต สมมุติให้ค่าลอจิกที่เป็น HIGH ทำให้เครื่องจักรให้หยุดทำงาน ให้ S แทนเอาท์พุต

เงื่อนไข ทำให้เอาท์พุต (S) เป็น HIGH คือ อินพุต2 ใน 3 ตัว หรือทั้ง 3 ตัวมีค่าทางลอจิกเป็น HIGH

ขั้นที่ 2 สร้างตารางความจริง

Input			Output	Mintern	Maxterm
A	B	C	S		
0	0	0	0	-	$A+B+C$
0	0	1	0	-	$A+B+\overline{C}$
0	1	0	0	-	$A+\overline{B}+C$
0	1	1	1	$\overline{A}BC$	
1	0	0	0	-	$\overline{A}+B+C$
1	0	1	1	$A\overline{B}C$	
1	1	0	1	$AB\overline{C}$	
1	1	1	1	ABC	

เงื่อนไขที่ทำให้ S="1" คือ

1.B=1,C=1

2.A=1,C=1

3.A=1,B=1

4.A=1,B=1,C=1

นอกนั้น S="0" ดังตารางความจริง

ขั้นที่ 3 เขียนสมการลอจิกจะเขียนได้สองรูปแบบดังได้กล่าวมาแล้ว คือ แบบผลบวกของมินเทอม หรือ ผลบวกของผลคูณ (SOP) และผลคูณของแมกซ์เทอม หรือ ผลคูณของผลบวก (POS) ดังนี้

SOP $S = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$

พิจารณาเอาท์พุตที่มีค่า = "1"

POS $S = (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)$

พิจารณาเอาท์พุตที่มีค่า = "0"

สมการแบบ SOP จะนิยมใช้มากเพราะดูไม่ซับซ้อนและ ง่ายต่อการลดรูปสมการ ในขั้นตอนต่อไป

ขั้นที่ 4 ลดรูปสมการ

การลดรูปสมการเป็นการทำให้เกตและจำนวนตัวแปร (ตัวอักษรที่ใช้แทนตัวแปรในสมการ) ลดน้อยลง เพื่อประหยัดเกต ทำให้วงจรง่าย ไม่ซับซ้อน และไม่เสียเวลา ในการสร้างวงจร ในขั้นตอนต่อไป การลดรูปสมการทำได้หลายวิธี ได้แก่ การใช้ตารางความจริง การใช้พีชคณิตบูลลีน และการใช้เครื่องมือพิเศษอื่นๆ เช่น การใช้ผังคาร์โนห์ (Karnaugh Map) เป็นต้น ซึ่งจะได้กล่าวรายละเอียดต่อไป สำหรับตัวอย่างนี้จะขอใช้พีชคณิตบูลลีน ดังนี้

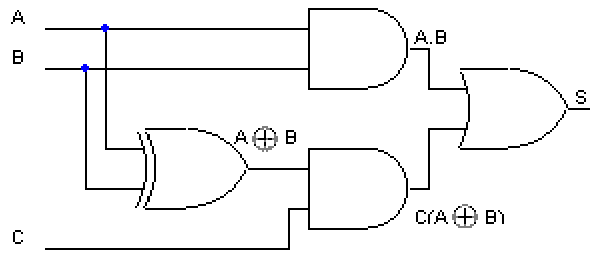
$$S = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

$$= C(\overline{A}B + A\overline{B}) + AB(\overline{C} + C)$$

$$= C(\overline{A}B + A\overline{B}) + AB.1$$

$$= AB + C(A \oplus B)$$

ขั้นที่ 5 เขียนวงจรลอจิก



ขั้นที่ 6 สร้างและทดสอบวงจร (มีรายละเอียดในหน่วยต่อไป)

ตัวอย่าง 6.6 กำหนดให้ Q เป็นเอาท์พุตและ A, B และ C เป็นอินพุต โดยมีเงื่อนไขดังนี้ Q = "0" เมื่อ A="1", B ="0" หรือ A = "0", C = "0" ส่วนเงื่อนไขอื่น Q = "1"

Input			Output	Mintern	เงื่อนไข
A	B	C	Q		
0	0	0	0	-	A=0,C=0
0	0	1	1	$\overline{A}\overline{B}C$	
0	1	0	0	-	A=0,C=0
0	1	1	1	$\overline{A}BC$	
1	0	0	0	-	A=1,B=0
1	0	1	0	-	A=1,B=0
1	1	0	1	$AB\overline{C}$	
1	1	1	1	ABC	

สมการจากตารางความจริง :-

$$Q = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC$$

ลดรูปสมการ

$$Q = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC$$

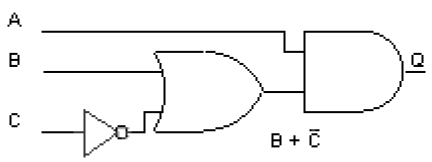
$$= (\overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC) + (ABC + AB\overline{C})$$

$$= AB(\overline{C} + C) + A\overline{C}(B + \overline{B})$$

$$= A.B + A.\overline{C}$$

$$= A(B + \overline{C})$$

วงจรลอจิก



6.4 การลดรูปสมการลอจิกด้วยพีชคณิตบูลลีน

การลดรูปสมการลอจิก คือการทำให้ฟังชันของสมการเหลือน้อยที่สุดเพื่อให้การต่อวงจรได้ง่ายที่สุดและประหยัดที่สุดดังได้กล่าวมาแล้ว ซึ่งมีหลายวิธี แต่ที่จะกล่าวในบทนี้คือการใช้ทฤษฎีพีชคณิตบูลลีนและการใช้หลักการพื้นฐานทางลอจิก สามรถทำได้ดังนี้

1. การจัดกลุ่มของเทอม

เทอมที่สัมพันธ์เกี่ยวข้องกันเมื่อนำมาจับกลุ่มกันแล้วถอดตัวร่วมหรือเมื่อนำมาจับกลุ่มกันอาจจะมองเห็นเป็นรูปแบบของนิพจน์ที่ตรงกับกฎเกณฑ์หรือทฤษฎีของพีชคณิตบูลลีน ซึ่งอาจทำให้ลดรูปหรือเปลี่ยนแปลงรูปแบบของนิพจน์นั้นได้ แต่โดยปกติเมื่อจับกลุ่มแล้วจะพบว่ามีตัวร่วม ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned} AB + BC + C &= AB + (BC + C) && \text{...[จับกลุ่ม]} \\ &= AB + C(B + 1) && \text{...[ถอดตัวร่วม]} \\ &= AB + C && \text{...[B+1 = 1]} \end{aligned}$$

เทอมบางเทอมสามารถที่จะเพิ่มเข้าไปในสมการโดยไม่มีผลทำให้ค่าลอจิกของสมการเปลี่ยนแปลง ทำให้มีเทอมมาจับกลุ่มเพิ่มมากขึ้น หรือการจับกลุ่มอาจจะใช้เทอมเดิมจับกลุ่มได้มากากว่าหนึ่งครั้งก็ได้ ดังตัวอย่าง

$$\begin{aligned} \overline{AC}D + ABC + AC &= \overline{AC}D + ABC + AC + (AC) \\ &= \overline{AC}D + (ABC + AC) + AC \\ &= \overline{AC}D + AC(B+1) + AC \\ &= (AC + \overline{AC}D) + AC \\ &= AC + D + AC \\ &= AC + D \end{aligned}$$

2. การคูณเข้าในวงเล็บ

ในสมการที่มีวงเล็บหรือสมการที่เป็นแมกซ์เทอม (Maxterm) สามารถที่จะนำแมกซ์เทอม (Maxterm) ที่คูณกันอยู่มาคูณกันทางพีชคณิต จะทำให้สมการอยู่รูปของมินเทอม ดูง่ายไม่ซับซ้อนและจะทำให้การลดรูปง่ายขึ้น ดังตัวอย่าง

$$\begin{aligned} (A+B+\overline{C})(\overline{A}+B) &= A\overline{A} + \overline{A}B + B\overline{C} + AB + BB + B\overline{C} \\ &= \overline{A}B + AB + B + BC \\ &= B(\overline{A} + A + 1 + C) \\ &= B \end{aligned}$$

3. การคูณเทอมด้วยตัวแปรภายใน

ตามปติสามารถที่จะคูณเทอมด้วย $(X+\overline{X})$ กรณีที่ X เป็นตัวแปรของสมการลอจิก แต่ไม่ปรากฏอยู่ในเทอมนั้น เมื่อนำไปคูณจะทำให้ได้เทอมใหม่เพิ่มและที่มีตัวแปร X ปรากฏอยู่ในเทอมใหม่นั้นหรือทำให้เทอมนั้นมีตัวแปรครบทุกตัว เป็นการทำให้การลดรูปง่ายขึ้น โดยไม่มีผลต่อค่าลอจิกในสมการนั้น ตัวอย่างเช่น

$$\overline{A}B + \overline{A}C + B\overline{C} = \overline{A}B(C + \overline{C}) + \overline{A}C + B\overline{C}$$

$$= \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}C + B\overline{C}$$

$$= (\overline{A}C + \overline{A}BC) + (B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C})$$

$$= \overline{A}C(1 + B) + B\overline{C}(1 + \overline{A})$$

$$= \overline{A}C + B\overline{C}$$

4. การใช้ทฤษฎีของ De Morgan

กรณีที่นิพจน์มีสัญลักษณ์ ของ NOT (Inverter) ติดคลุมทั้งนิพจน์หรือบางส่วนของนิพจน์ การที่จะแยกออกจากกันสามารถทำได้โดยการใช้ทฤษฎีของ De Morgan เมื่อแยกนิพจน์ออกเป็นตัวแปรเดี่ยว ๆ หรือเป็นเทอมเป็นกลุ่มย่อยๆ ทำให้ดูง่ายไม่ซับซ้อน สามารถที่จะลดรูปได้ง่ายขึ้น ดังตัวอย่าง

a). $\overline{A\overline{(B + \overline{C})}D} = \overline{A(\overline{B}.C)D}$

$$= \overline{A} + B + \overline{C} + \overline{D}$$

b). $\overline{\overline{A} + \overline{B}C} = A(\overline{\overline{B}C})$

$$= A.(B + \overline{C})$$

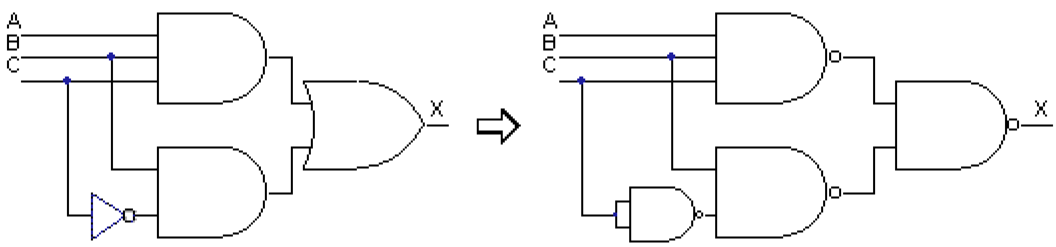
c). $\overline{AB(\overline{CD})} = \overline{AB} + CD$

$$= \overline{A} + \overline{B} + CD$$

6.5 การปรับปรุงวงจรลอจิก

ในการออกแบบขั้นตอนที่ผ่านมาเป็นการใช้ AND และ OR เกตเป็นส่วนใหญ่ ทำให้สมการอยู่ในรูปของ Sum-Of-Product จะเห็นว่าวงจรประกอบด้วย AND เกตจำนวนหนึ่ง และมี OR เกตเพียงหนึ่งตัว จากวงจรดังกล่าวสามารถที่จะใช้ NAND เกตแทนได้ทั้งหมด ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในเรื่องการใช้เกตทดแทนกัน การใช้เกตชนิดเดียวทำให้ประหยัดในเรื่องการใช้เกตหลายชนิดในวงจรเดียวกันนอก จากนี้การใช้เกตชนิดเดียวในวงจรอาจใช้ IC เกตเพียวตัวเดียว(IC เกตหนึ่งตัวอาจมีจำนวนเกตตั้งแต่ 2-8 ตัว) ได้ทำให้มีผลต่อความเร็ว (Speed) ของวงจรและประหยัดพลังงานไฟฟ้าได้อีกทางหนึ่ง ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 6.7

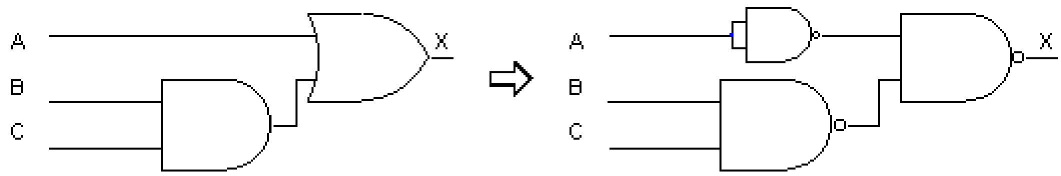


$$X = ABC + B\overline{C}$$

$$X = \overline{\overline{ABC + B\overline{C}}}$$

$$= \overline{(\overline{ABC})(\overline{B\overline{C}})}$$

ตัวอย่างที่ 6.8



$$X = A+BC$$

$$X = \overline{\overline{A+BC}} = \overline{\overline{A}(\overline{BC})}$$

สรุป

วงจรคอมบิเนชัน (Combination circuits) บางครั้งจะเรียกว่า วงจรเชิงจัดหมู่ เป็นวงจรที่ประกอบขึ้นด้วยลอจิกเกตต่าง ๆ การสร้างวงจรก็คือ การนำเอาเกตต่าง ๆ มาต่อกันเป็นวงจรเพื่อให้วงจรสามารถทำงานได้ตามที่เราต้องการ การทำงานจะขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของเกตและสัญญาณอินพุทที่ป้อนเข้า โดยแสดงออกทางเอาท์พุตของวงจร

โดยปกติวงจรคอมบิเนชันจะออกแบบเป็นวงจรลอจิกเฉพาะอย่าง และผลิตออกมาใช้งานเป็นวงจรสำเร็จรูปหรือไอซีระดับ SSI และ MSI

1. small-scale integration (SSI) <12 gates/chip (Transistor)
2. medium-scale integration (MSI) 12 - 99 gates/chip (Transistor)

ได้แก่ วงจรมัลติเพล็กเซอร์ ดีวงจรมัลติเพล็กเซอร์ วงจรสร้างและตรวจสอบพาริตี้ วงจรถอดรหัส วงจรเข้ารหัส วงจรเปรียบเทียบ และวงจรบวก เป็นต้น แต่ถ้าต้องการวงจรคอมบิเนชันที่แตกต่างก็สามารถที่จะออกแบบได้ตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการ

แบบฝึกหัด

6.1 จากสมการให้เขียนวงจรลอจิก และให้ลดรูปด้วยพีชคณิตบูลีนพร้อมเขียนวงจรหลังลดรูปแล้ว

a. y = AB'C + ABC

b. y = (A' + B + C)(A + B + C')

c. x = ABC +AC'

d. x = (ABC)'(A + B +C)'

6.2 สร้างตารางความจริงจากนิพจน์ของบูลลีนต่อไปนี้

a. P = x'y + x'y + xyz

b. Q = xy + (x' + z)(y + z')

c. R = wx + xy' + wx'z + xyz' +w'xy'

6.3 เปลี่ยนนิพจน์ของบูลลีนให้อยู่ในรูปของ

1. Product term (min trem)
2. SOP
3. Sum trem (Max term)
4. POS

a. (A + B + C')(A' + B' + C)

b. B' + (A + B)(A + C')

c. (A + B +D') + AC'

d. AC + A'D'

e. ABC'D + B'CD + AD'

f. A' +B + CD

g. AB' + BC + AC

h. (A + B)(A + C') + AB'

6.4 เปลี่ยนสมการลอจิกให้อยู่ในรูปของ สวิตชิ่งฟังชัน (Switch Function) โดยใช้ MIN trem และให้แสดงทั้งฟังชั่น f และ f' ตัวอย่าง เช่น

X= $\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$ เปลี่ยนเป็น

f(A,B,C) = $\sum m$ (0,1,2,4)

f'(A,B,C) = $\sum m$ (3,,5,6,7)

a. P = x'y + xy'+xyz

b. Q = x + yz' + x'z

6.5 ลดรูปสมการด้วยพีชคณิตบูลลีน เขียนวงจร และ ปรับปรุงวงจรลอจิกโดยใช้ NAND เพียงอย่างเดียว

a. f(A,B,C) = $\sum m$ (0,1,3,6,7)

b. f(A,B,C) = $\sum m$ (1,3,4)

6.6 ออกแบบวงจร ตามโจทย์และเงื่อนไขต่อไปนี้

เครื่องจักรในโรงงานแห่งหนึ่ง มีเครื่องชี้วัดเป็นไฟแสดง ที่จะบอกให้วิศวกรหยุดเครื่อง เพื่อทำการ

บำรุงรักษาและซ่อมระบบ ดังนี้

1. ระดับน้ำมันเครื่องต่ำ : จะหยุดเครื่องเมื่อครบกำหนดระยะเวลาการทำงานด้วย
2. ระยะเวลาการทำงาน : จะหยุดเครื่องเมื่อระดับน้ำมันเครื่องต่ำประกอบด้วย
3. ความร้อนสูง : จะต้องหยุดเครื่องทันที