เอกสารประกอบการสอน

วิชา ระบบดิจิตอลเบื้องต้น (Introduction to Digital System)

รหัส 4121703

บทที่ 7 เทคนิคการลดรูปโดยใช้ผังคาร์โนห์

(KARNAUGH MAP METHOD)

หลักสูตรระดับปริญญาตรี

พุทธศักราช 2551 (ปรับปรุง 2554)

โดย

จุฑาวุฒิ จันทรมาลี

สาขาวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนดุสิต

บทที่ 7 เทคนิคการลดรูปโดยใช้ผังคาร์โนห์
(KARNAUGH MAP METHOD)

7.1 บทนำ

เทคนิคการลดรูปโดยใช้ผังคาร์โนห์ (KARNAUGH MAP METHOD/K-map) เป็นเครื่องมือที่จะใช้จดรูปสมการลอจิก หรือเป็นการเปรียบตารางความจริง (Truth table) ให้เป็นวงจรลอจิก ปกติในการลดรูปสมการที่มีตัวแปรไม่มากนัก เช่น 4, 3 และ 4 ตัวและเป็นสมการที่ไม่ซับซ้อน จะใช้ชนิดข้อมูลนั้น หรือตารางความจริง แต่ในกรณีที่เป็นสมการที่ซับซ้อนมักจะใช้วิธีการของ K-map ซึ่งสามารถจะทำได้ง่ายและรวดเร็ว แต่อย่างไรก็ตาม ถ้ามีตัวแปรจำนวนมาก และเป็นสมการที่ซับซ้อน ก็มักจะใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ช่วย

7.2 วิธีการของ KARNAUGH MAP

1. ทำสมการลอจิกให้อยู่ในรูปของ Sum-of-Product หรือ Minterm วิธีการก็คือจะต้องสร้างตารางความจริง (Truth table) จากสมการหรือวงจรลอจิกที่กำหนดให้ พิจารณาในเทอมที่มี Output เป็น "1" แล้วเขียนเทอมของเอาท์พุตในรูปของมินเทอม จากนั้นนำเอานิพจน์เหล่านั้นมากระทำด้วยตัวกระทำ OR ก็จะได้สมการในรูปของ Sum -of –Product หรือ Sum -of –Minterm

ตัวอย่างที่ 7.1 จากสมการ $X = MN\overline{P} + (M+\overline{N})P$ ให้สร้างสมการในรูปของ Sum-of-Minterm

M	N	P	MN	$MN\overline{P}$	$M+\overline{N}$	$(M+\overline{N})P$	X	$M\text{int}erm$
0	0	0	0	0	1	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	$\overline{M}\overline{N}P$
0	1	0	0	0	0	0	0	
0	1	1	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	1	0	0	
1	0	1	0	0	1	1	1	$M\overline{N}P$
1	1	0	1	1	1	0	1	$MN\overline{P}$
1	1	1	1	0	1	1	1	MNP

ดังนั้นจะได้สมการ $X = \overline{M}\overline{N}P + M\overline{N}P + MN\overline{P} + MNP$

2. สร้าง K-map การสร้าง K-map จะต้องสร้างตารางเท่ากับจำนวนความเป็นไปได้ของอินพุต ดังนั้นจะมีจำนวนตารางได้เท่ากับ 2^n ถ้า n เท่ากับจำนวนตัวแปร เช่น ตัวแปร 2 ตัวจะมี ตารางได้ 4 ตาราง ตัวแปร 3 ตัวจะมีตารางได้ 8 ตาราง เป็นต้น ขั้นต่อไปจะต้องแบ่งตัวแปรออกเป็นสองกลุ่ม ซึ่งจะอยู่ประจำแถวและคอลัมน์ของตารางดังรูป

B \ A	0	1
0	00	10
1	01	11

ก). 2 ตัวแปร

C \ AB	00	01	11	10
0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}B\overline{C}$	$AB\overline{C}$	$A\overline{B}\,\overline{C}$
1	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	ABC	$A\overline{B}C$

ข). 3 ตัวแปร

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

ค). 4 ตัวแปร

3. เขียนเลขฐานสองหรือค่าของตัวแปรกำกับแถวและคอลัมน์ จากรูป (ก) ตาราง 2 ตัวแปร จะมีตัวแปร A กำกับอยู่ที่แถว และมีค่าเป็น 0 และ 1 ตามลำดับ ส่วนตัวแปร B กำกับอยู่ที่คอลัมน์มีค่าเป็น 0 และ 1 ตามลำดับ เช่นเดียวกับในรูป (ข) ตาราง 3 ตัวแปร จะมีตัวแปร A,B กำกับอยู่ที่แถว มีค่าเป็น 00, 01, 10, 11 แต่การเรียงในตารางของ K-map จะแตกต่างออกไปก็เพื่อให้ตารางประชิดกัน มีค่าของตัวแปรเปลี่ยนไปเพียงหนึ่งตัวเท่านั้น ถึงแม้ว่าจะม้วนตารางจากขวามาซ้าย หรือจากบนมาล่างก็ตาม ตารางที่ประชิดกับค่าของตัวแปรประจำตารางก็ยังแตกต่างกันเพียงตัวเดียว

4. ลงค่าลอจิกของเอาท์พุตในช่องตาราง(Cell) จากตัวอย่างที่ผ่านมา ในรูป (ก) ลงลำดับของเทอมเป็นเลขฐานสิบ (ดูจากตารางความจริง) เพื่อให้เปรียบเทียบกับตารางของ K-map ในรูป (ข) ซึ่งลงค่าลอจิกของ Out put และจะเป็น K-map ที่จะต้องใช้ต่อไป

P \ MN	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

ก). ลงลำดับที่ของเทอม

P \ MN	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	1	1

ข). ลงค่าลอจิกของ Out put

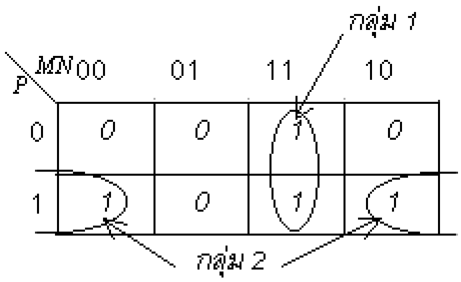
5. จับกลุ่มของเทอมที่มีค่าเป็น "1" เป็นการจับกลุ่มของตาราง K-map ที่มีค่าเป็น "1" ที่อยู่ประชิดกัน มีหลักเกณฑ์ดังนี้

5.1 จับกลุ่มประชิดให้มีจำนวนเทอมมากที่สุด สำหรับจำนวนที่จะจับได้คือ 2,4,8... (หรือเท่ากับ 2^n เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็ม)

5.2 การใช้กลุ่มทับกัน โดยแต่ละกลุ่มจะต้องเป็นกลุ่มที่ใหญ่ที่สุด

5.3 หากลุ่มประชิดภายนอก โดยการม้วนตารางทั้ง 2 แนว

5.4 พยายามจัดเทอมเดี่ยวให้เข้ากลุ่ม



จากตัวอย่างจับกลุ่มได้ 2 กลุ่ม คือ
กลุ่ม 1 เป็นกลุ่มประชิด 2 เทอม
กลุ่ม 2 เป็นประชิดภายนอก โดยม้วนตารางเข้าหากันมี 2 เทอม

6. ตีความหมายและเขียนสมการลอจิก

กลุ่ม 1 X = "1" เมื่อ M = 1, N = 1, P = 0 หรือ 1 ก็ได้

$\therefore X = MN$

กลุ่ม 2 X = "1" เมื่อ P = 1, N = 0, M = 0 หรือ 1 ก็ได้

$\therefore X = P\overline{N}$

นำผลทั้งสองกลุ่มมา OR กันจะได้สมการดังนี้ :

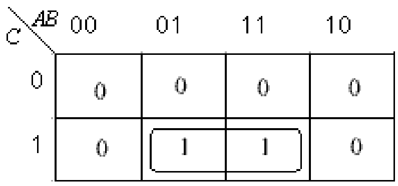
$$\boxed{X = MN + \overline{N}P}$$

7.3 เทคนิคการจับกลุ่ม

การจับกลุ่ม (Looping group of term)

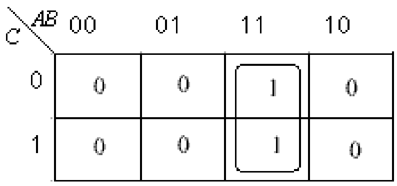
การจับกลุ่มที่เป็นได้และพบมากมี 3 แบบ คือ การจับกลุ่ม 2, 4 และ 8 เทอม ดังตัวอย่างข้างล่าง (Tocci, Ronald J.,1998 :p 131-134)

1.การจับกลุ่ม 2 เทอม



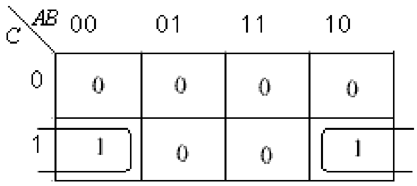
$X = \overline{A}.B.C + A.B.C$

$= B.C$



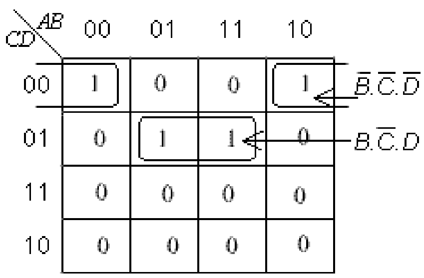
$X = A.B.C + A.B.\overline{C}$

$= A.B$



$X = \overline{A}.\overline{B}.C + A.\overline{B}.C$

$= \overline{B}.C$

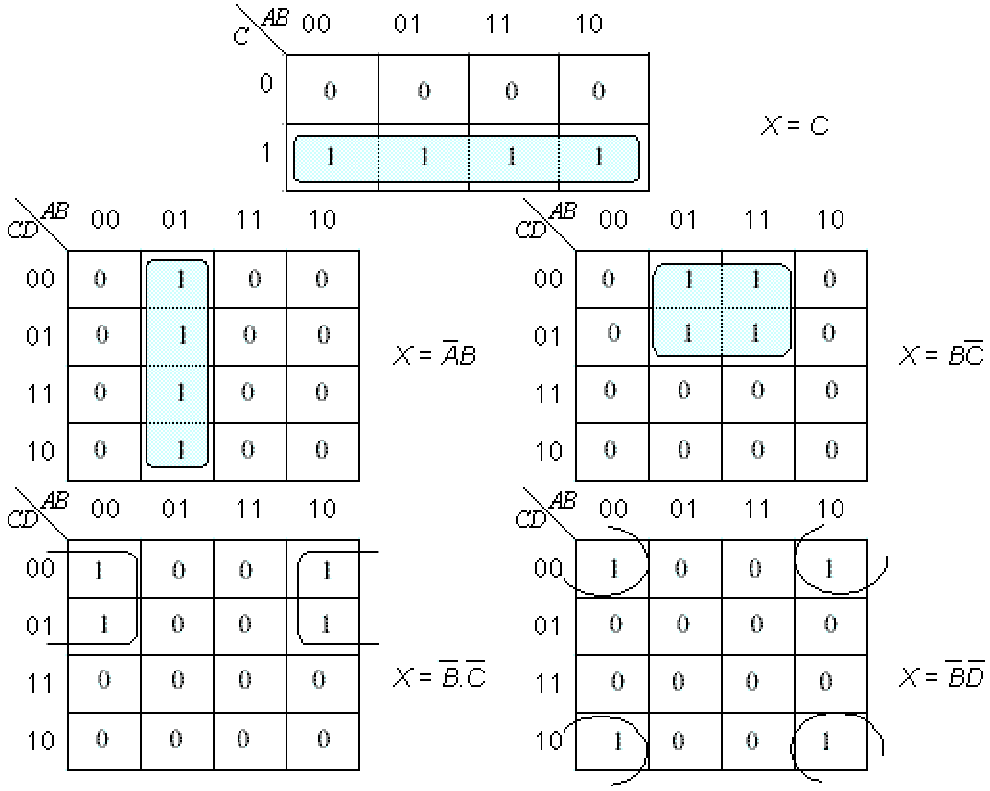


$X = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + A.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.B.\overline{C}.D + A.B.\overline{C}.D$

$= \overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + B.\overline{C}.D$

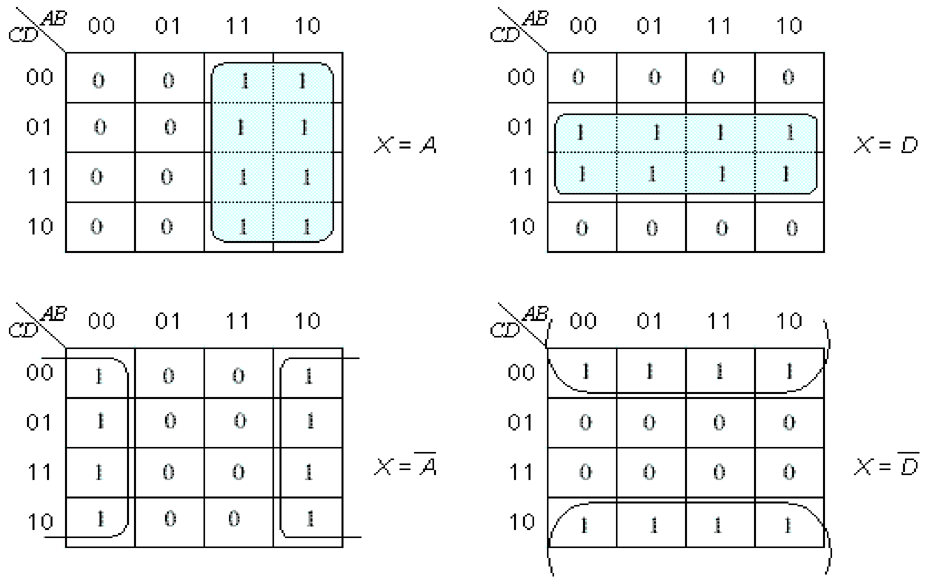
ในรูปแรกและรูปที่ 2 เป็นการจับคู่ประชิดทั้งแนวนอนและแนวตั้งของตาราง รูปที่ 3 เป็นผังคาร์โนห์ชนิด 3 ตัวแปร เช่นเดยวกัน เป็นการจับคู่ประชิดนอกโดยการม้วนตารางเข้าหากัน ส่วนรูปที่ 4 เป็นผังคาร์โนห์ชนิด 4 ตัวแปร สามารถที่จะจับคู่ประชิดภายในได้ทั้งในแนวนอนและแนวตั้ง และจับคู่ประชิดภายนอกได้ทั้งในแนวนอนและแนวตั้ง เช่นเดียวกัน

2. การจับกลุ่ม 4 เทอม



การจับกลุ่ม 4 เทอม จะจับเทอมประชิดที่เรียงลำดับตลอดทั้ง 4 เทอม อาจจะเป็นแนวนอนหรือแนวตั้งก็ได้ ดังรูปที่ 1 และรูปที่ 2 ส่วนในรูปที่ 3 เป็นการจับกลุ่มประชิดภายใน 4 เทอมที่ประชิดกันทั้ง 4 ด้าน และรูปที่ 4, 5 เป็นการจับกลุ่มประชิดนอกที่จะต้องม้วนตารางเข้าหากัน

3. การจับกลุ่ม 8 เทอม



รูปที่ 1 และ 2 เป็นการจับกลุ่มประชิดภายใน 8 เทอม ซึ่งจะทำได้ทั้งแนวนอนและแนวตั้ง ส่วน รูปที่ 4 และ 5 เป็นการจับกลุ่มประชิดภายนอก 8 เทอม อย่างไรก็ตามการจับกลุ่มนอกจากการจับกลุ่มแบบประชิดภายใน และ ประชิดภายนอกแล้ว ในทางปฏิบัติจะต้องพิจารณาการใช้กลุ่มทับและจะต้องจับให้ได้กลุ่มใหญ่ที่สุด ดังได้กล่าวมาแล้ว

การจับกลุ่มประชิดที่เอาท์พุตลอจิกเป็น "0"

ในบางกรณีการจับกลุ่มในเทอมที่มีค่าลอจิกเอาท์พุตเป็น "1" ทำให้สมการที่ลดรูปแล้วยังมีความซับซ้อนหรือยังลดรูปได้น้อย เราสามารถจะจับกลุ่มในเทอมที่ มีค่าลอจิกเอาท์พุตเป็น "0" แทนก็ได้ แต่สมการที่ได้จะอยู่ในรูป **คอมพลีเมนต์** ตัวอย่างข้างล่าง :-

จากสวิตซ์ชิ่งฟังชั่น f(A, B, C) = Σm (0, 2,3,4,6,7) จงลดรูปสมการโดยใช้ K-map และให้ใช้กลุ่มประชิดที่เอาท์พุตลอจิกเป็น "0"

C \ AB	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	$\boxed{0}$	1	1	$\boxed{0}$

เป็นการจับกลุ่มประชิด "0" ทำเหมือนเป็นมินเทอม คือ $\bar{A}\bar{B}C$ และ $A\bar{B}C$ จะได้สมการที่เอาท์พุตเป็นคอมพลีเมนต์ ($\bar{X}$)

$$\bar{X} = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C$$
$$\bar{\bar{X}} = \overline{(\bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C)}$$
$$= \overline{\bar{B}C(\bar{A}+A)}$$
$$= \overline{\bar{B}C}$$
$$= B + \bar{C}$$

พิจารณา กลุ่มประชิด "0"

$\bar{X}$ = "1" เมื่อ B="0" และ C="1" ส่วน A ไม่สนใจ

จะได้สมการ

$$\bar{X} = \bar{B}C$$
$$\bar{\bar{X}} = \overline{\bar{B}C}$$
$$= B + \bar{C}$$

สรุปขั้นตอนการใช้ K-map ลดรูปสมการ

1. สร้างตาราง K-map และใส่ "1" และ " 0 " ในช่องของตารางซึ่งตรงกับค่าระดับ Output ของตารางความจริง
2. พิจารณาเทอมเดี่ยว ที่อยู่แยกไม่ประชิดกับเทอมที่เป็น "1" ใด
3. จับกลุ่มประชิดกันแบบคู่หรือสองเทอม
4. จับกลุ่มประชิดกันแปดเทอม อาจจับทับกับกลุ่มเดิมที่ถูกจับมาแล้ว
5. จับกลุ่มประชิดกัน 4 เทอม
6. พยามจับกลุ่มเทอมที่มีค่าเป็น "1" ให้ได้ทุกเทอม และจำนวนกลุ่มจะต้องน้อยที่สุด
7. พิจารณาตีความแต่ละกลุ่มแล้วสร้างเทอมของนิพจน์ นำแต่ละเทอมมารวมกันด้วยตัวกระทำ OR

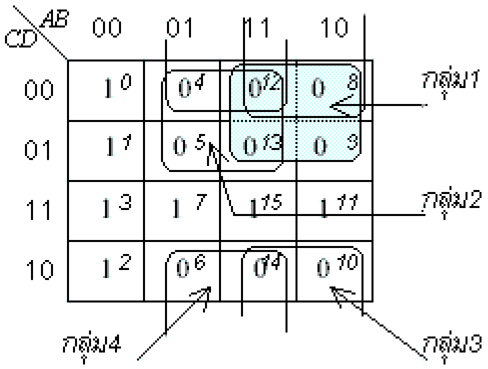
(Tocci, Ronald J.,1998 :p 134-135)

7.4 การลดรูปสมการในรูปของ Product-Of-Sum (POS)

การลดรูปสมการในรูปของ Product-Of-Sum (POS) โดยใช้ K-map ก็ทำเช่นดียวกันกับการลดรูปของสมการ Sum-od-Product (SOP) ดังกล่าวมาแล้ว ตั้งแต่การสร้างผัง การลงค่าลอจิกในผัง และหลักการจับกลุ่มประชิด แต่การจับกลุ่มประชิดจะต้องจับกลุ่มของเซลล์ที่มีลอจิกเอาท์พุตเป็น "0"

การพิจารณาตีความหมายเพื่อสร้างสมการ จะต้องพิจารณาเทอมในรูปแบบของ แมกซ์เทอม (Maxterm) ดังตัวอย่างข้างล่างนี้

จากสวิตช์ชิ่งฟังชั่น $f(A, B, C, D) = \prod M(4,5,6,8,9,10,12,13,14)$ จงลดรูปสมการโดยใช้ K-map



พิจารณาตีความ ให้ f(A, B, C,D) =X

กลุ่ม 1 X= "0" เมื่อ A ="1" ,C="0" หรือ $(\bar{A}+C)$

กลุ่ม 2 X= "0" เมื่อ B ="1" ,C="0" หรือ $(\bar{B}+C)$

กลุ่ม 3 X= "0" เมื่อ A ="1" ,D ="0" หรือ $(\bar{A}+D)$

กลุ่ม 4 X= "0" เมื่อ B ="1" ,D ="0" หรือ $(\bar{B}+D)$

กลุ่มประชิดภายใน มี 2 กลุ่ม ๆ ละ 4 เทอม คือ กลุ่ม 1 และ กลุ่ม 2

กลุ่มประชิดภายนอก มี 2 กลุ่ม ๆ ละ 4 เทอม คือ กลุ่ม 3 และ กลุ่ม 4

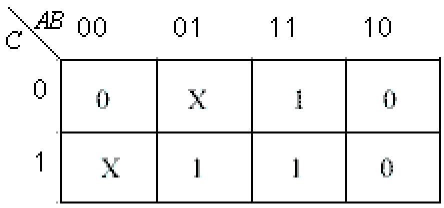
สมการ นำเทอม POS ที่ได้จากการพิจารณาตีความ มาคูณกัน

$$X = (\bar{A}+C)(\bar{B}+C)(\bar{A}+D)(\bar{B}+D)$$

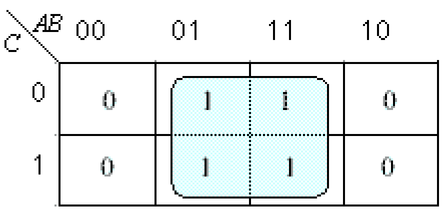
7.5 เทอมที่ไม่สนใจ (Don't - care term)

ในวงจรลอจิกบางวงจรสามารถที่จะออกแบบโดยที่ไม่ระบุ Output บาง Output ว่าจะต้องเป็นลอจิก "1" หรือลอจิก "0" Output ที่ไม่สนใจหรือไม่สามารถระบุเอาท์พุตได้นี้เรียกว่า "Don't care" ดูตัวอย่าง ตารางความจริง ข้างล่าง มีอยู่ 2 เทอมที่ Output ของวงจรอาจจะเป็น "0" หรือ "1" ก็ได้ เราแทนค่าด้วย "X"

Input			Output
A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	X
0	1	0	X
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



(ข)



(ค) $X = B$

หมายเหตุ
เทอมที่มีค่าลอจิกเอาท์พุต = "X" คือ X="1" หรือ X="0" ก็ได้

ในการใช้ K-map เพื่อลดทอนสมการ ผู้ออกแบบอาจจะแทนค่าลอจิกที่เป็น "Don't care" ลงใน K-map เป็น "0" หรือ "1" ก็ได้ จากตัวอย่างรูป (ข) เป็นการลง K-map ตาม Output ในตำแหน่งที่ลง "X" จะแทนค่าด้วย "0" หรือ "1" ขึ้นอยู่กับผู้ออกแบบด้วยว่าจำเป็นต้องนำไปเข้ากลุ่มหรือไม่ ถ้าจำเป็นก็แทนค่าด้วย "1" ถ้าไม่จำเป็นก็แทนด้วย "0" ดังรูป (ค)

7.6 ตัวอย่างการใช้ K-map ลดรูปสมการลอจิก

ตัวอย่างที่ 7.2 จาก K-map ข้างล่างลงสร้างสมการ

CD \ AB	00	01	11	10
00	1 (0)	0 (4)	0 (12)	0 (8)
01	0 (1)	1 (5)	1 (13)	0 (9)
11	1 (3)	1 (7)	1 (15)	0 (11)
10	0 (2)	0 (6)	0 (14)	0 (10)

วิธีทำ

จับกลุ่มเทอมที่มีค่าลอจิกเป็น "1" ได้ 3 กลุ่ม ดังนี้

1. พิจารณา "1" เดี่ยว คือ ช่อง 0000 (ลำดับที่ 0 ให้เป็นกลุ่มที่ 1)
2. พิจารณา "1" ที่อยู่ชิดกับกลุ่มใหญ่ ให้จับกลุ่มซ้อนกับกลุ่มใหญ่คือ ช่อง 0011 จับกับช่อง 0111 (ลำดับที่ 3 และ 7 ให้เป็นกลุ่มที่ 2)
3. พิจารณากลุ่มใหญ่ 4 เทอม คือ ช่อง 0001, 0101, 0111, 1111 (ลำดับที่ 5,7,13,15 ให้เป็นกลุ่มที่ 3)

ตีความหมายและเขียนสมการ

กลุ่มที่ 1 = $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ (กลุ่มเทอมเดี่ยว)

กลุ่มที่ 2 = $\overline{A}CD$ (A = 0 , C = 1 , D = 1, B = ไม่สนใจเป็น 0 หรือ 1 ก็ได้)

กลุ่มที่ 3 = BD (B = 1 , D = 1 , A และ B = ไม่สนใจเป็น 0 หรือ 1 ก็ได้)

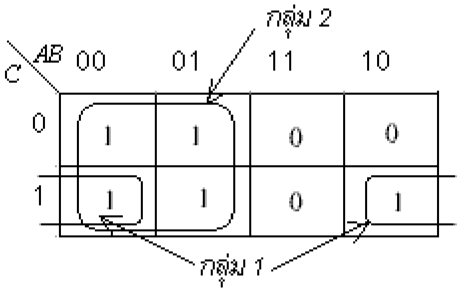
$$\therefore \quad X = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}CD + BD$$

ตัวอย่างที่ 7.3 ใช้ K-map ลดทอนสมการ

$$Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$$

วิธีทำ สร้างตารางความจริงเพื่อทำสมการให้อยู่ในรูปของ Sum-of-Minterm ที่สมบูรณ์ คือ มีตัวแปรครบทุกตัวในเทอม ที่เอาท์พุตมีค่าเป็น "1" หรืออาจพิจารณาจากสมการเดิมซึ่งเป็นรูป Sum-of-Product อยู่แล้ว โดยเพิ่มนิพจน์ที่ขาดหายไปให้ครบ ดังนี้

$$Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \left(A\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}C\right) + \left(\overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C}\right)$$



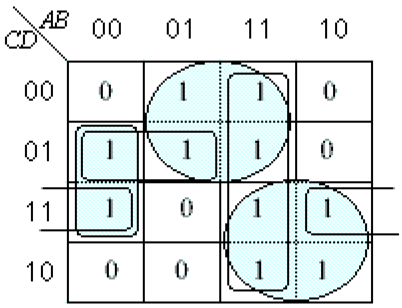
ตีความ กลุ่ม 1 Y = 1 เมื่อ B = 0 , C = 1 , A = ไม่สนใจ = $\bar{B}C$

กลุ่ม 2 Y = 1 เมื่อ A = 0 , B และ C = ไม่สนใจ = $\bar{A}$

$$Y = \bar{B}C + \bar{A}$$

ตัวอย่างที่ 7.4 f(A,B,C,D) = Σm (1,3,4,5,10,11,12,13,14,15)

K-map



จับกลุ่มประชิดที่ทำได้ 6 กลุ่ม คือ

1. จำนวน 4 เทอมได้แก่ 0100, 0101, 1100, 1101
2. จำนวน 4 เทอมได้แก่ 1111, 1101, 1011, 1010
3. จำนวน 4 เทอมได้แก่ 1100, 1101, 1111, 1110
4. จำนวน 2 เทอมได้แก่ 0001, 0101
5. จำนวน 2 เทอมได้แก่ 0001, 0011
6. จำนวน 2 เทอมประชิดนอก ได้แก่ 0011, 1011

กลุ่มประชิดที่ใช้งานจริง

กลุ่ม 1, 2 และกลุ่มที่ 5

พิจารณาตีความ

กลุ่ม 1 X="1" เมื่อ B="1" และ C="0" หรือ $B\bar{C}$

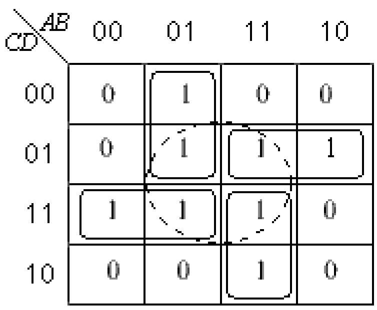
กลุ่ม 2 X="1" เมื่อ A="1" และ C="1" หรือ AC

กลุ่ม 5 X="1" เมื่อ A,B="0" และ D="1" หรือ $\bar{A}\bar{B}D$

สมการ $X = B\bar{C} + AC + \bar{A}\bar{B}D$

ตัวอย่างที่ 7.5 f(A,B,C,D) = Σm (3,4,5,7,9,13,14,15)

K-map



จับกลุ่มประชิดที่ทำได้ 5 กลุ่มคือ

1. จำนวน 4 เทอมได้แก่ 0101, 0111, 1101, 1111
2. จำนวน 2 เทอมได้แก่ 0100, 0101
3. จำนวน 2 เทอมได้แก่ 0011, 0111
4. จำนวน 2 เทอมได้แก่ 1110, 1111
5. จำนวน 2 เทอมได้แก่ 1001, 1101

กลุ่มประชิดที่ใช้งานจริง

กลุ่มที่ 2, 3, 4 และกลุ่มที่ 5

พิจารณาตีความ

สมการ $X = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}CD + ABC + A\bar{C}D$

กลุ่ม 2 X="1" เมื่อ A="0", B="1" ,C="0" หรือ $\bar{A}B\bar{C}$

กลุ่ม 3 X="1" เมื่อ A="0", C="1" ,D="1" หรือ $\bar{A}CD$

กลุ่ม 4 X="1" เมื่อ A="1", B="1" ,C="1" หรือ ABC

กลุ่ม 5 X="1" เมื่อ A="1", C="0" ,D="1" หรือ $A\bar{C}D$

ตัวอย่างที่ 7.6 f(A,B,C,D) = Σm (5,7,8,10,11,12,13,14,15)

K-map

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	1
10	0	0	1	1

จับกลุ่มประชิดที่ทำได้ 4 กลุ่มคือ

1. จำนวน 4 เทอมได้แก่ 0101, 0111, 1101, 1111
2. จำนวน 4 เทอมได้แก่ 1111, 1110, 1011, 1010
3. จำนวน 4 เทอมได้แก่ 1100, 1101, 1111, 1110
4. จำนวน 4 เทอมประชิดนอกได้แก่ 1100, 1000, 1110, 1010

กลุ่มประชิดที่ใช้งานจริง

กลุ่มที่ 1, 2 และกลุ่มที่ 4

พิจารณาตีความ

กลุ่ม 1 X="1" เมื่อ B="1", D="1" หรือ BD

กลุ่ม 2 X="1" เมื่อ A="1", C="1" หรือ AC

กลุ่ม 4 X="1" เมื่อ A="1", D="0" หรือ $A\bar{D}$

สมการ $X = BD + AC + A\bar{D}$

ตัวอย่างที่ 7.7 f(A,B,C,D) = Σm (2,5,7,8,10,12,14,15)

K-map

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	0	0
11	0	1	1	0
10	1	0	1	1

จับกลุ่มประชิดที่ทำได้ 5 กลุ่มคือ

1. จำนวน 2 เทอมได้แก่ 0101, 0111
2. จำนวน 2 เทอมได้แก่ 0111, 1111
3. จำนวน 2 เทอมได้แก่ 1111, 1110
4. จำนวน 2 เทอมประชิดนอกได้แก่ 0010,1010
5. จำนวน 4 เทอมประชิดนอกได้แก่ 1100, 1000, 1110, 1010

กลุ่มประชิดที่ใช้งานจริง

ตาม K-map ด้านซ้าย คือ กลุ่ม ที่1, 2, 4 และกลุ่มที่ 5

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	0	0
11	0	1	1	0
10	1	0	1	1

พิจารณาตีความ

กลุ่ม 1 X="1" เมื่อ A="0", B="1", D="1" หรือ $\overline{A}BD$

กลุ่ม 2 X="1" เมื่อ B="1", C="1", D="1" หรือ *BDC*

กลุ่ม 4 X="1" เมื่อ B="0", C="1", D="0" หรือ $\overline{B}C\overline{D}$

กลุ่ม 5 X="1" เมื่อ A="1", D="0" หรือ $A\overline{D}$

สมการ $X = \overline{A}BD + BCD + \overline{B}C\overline{D} + A\overline{D}$

เลือกกลุ่มประชิดใหม่

K-map

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	0	0
11	0	1	1	0
10	1	0	1	1

กลุ่มประชิดที่ใช้งานจริง

ตาม K-map ด้านซ้าย คือ กลุ่ม ที่1, 3, 4 และกลุมที่ 5

พิจารณาตีความ

กลุ่ม 1 X="1" เมื่อ A="0", B="1", D="1" หรือ $\overline{A}BD$

กลุ่ม 3 X="1" เมื่อ A="1", B="1", C="1" หรือ *ABC*

กลุ่ม 4 X="1" เมื่อ B="0", C="1", D="0" หรือ $\overline{B}C\overline{D}$

กลุ่ม 5 X="1" เมื่อ A="1", D="0" หรือ $A\overline{D}$

สมการ $X = \overline{A}BD + ABC + \overline{B}C\overline{D} + A\overline{D}$

ตัวอย่างที่ 7.8 f(A,B,C,D) = $\prod M$(0,2,5,7,8,10,13,15)

K-map

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	1	0

กลุ่มประชิดและพิจารณาตีความ

กลุ่ม 1 (มุม 4 เทอม) X= "0" เมื่อ B="0", D="0" หรือ *(B+D)*

กลุ่ม 2 (ตรงกลาง) X= "0" เมื่อ B="1", D="1" หรือ $(\overline{B} + \overline{D})$

สมการ $X = (B + D)(\overline{B} + \overline{D})$

ตัวอย่างที่ 7.9 f(A,B,C,D) = $\sum m$ (1,2,3,5,10,11) Don't care = 4,9,13

กลุ่มประชิดและพิจารณาตีความ

K-map

x คือ don't care จะมีค่าลอจิกเป็น "1" หรือ "0" ก็ได้ จับกลุ่มได้ 2 กลุ่ม คือ :-

กลุ่ม 1 จำนวน 4 เทอม (รวมทั้ง x)

X= "1" เมื่อ C="0", D="1" หรือ $\overline{C}D$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	x	0	0
01	1	1	x	x
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

กลุ่ม 2 จำนวน 4 เทอม ประชิดนอก

X= "1" เมื่อ B="0", C="1" หรือ $\bar{B}C$

สมการ $X = \bar{C}D + \bar{B}C$

7.7 ผังคาร์โนห์ขนาดใหญ่

ผัง K-map ตั้งแต่ 5 ตัวแปรขึ้นไปถือว่าเป็น K-map ขนาดใหญ่ ซึ่งการจัดวางรูปแบบของผัง และการจัดกลุ่มประชิดจะแตกต่างออกไป ส่วนหลักการพิจารณาตีความและสร้างสมการจะเหมือนเดิม ผัง K-map ขนาดใหญ่บางทีเรียกว่า K-map สามมิติ เพื่อสะดวกในการพิจารณาจับกลุ่มประชิดจึงจะต้องแบ่งตารางออกและนำมาวางซ้อน กัน เซลล์ในตารางแต่ละชั้น ที่อยู่ในคอลัมน์ตรงกันก็เป็นกลุ่มประชิดกัน ส่วนการจับกลุ่มประชิดนอกและประชิดในของแต่ละตารางก็เหมือนเดิม

ผัง K-map ชนิด 5 ตัวแปร

จัดวางผังในแนวระนาบ

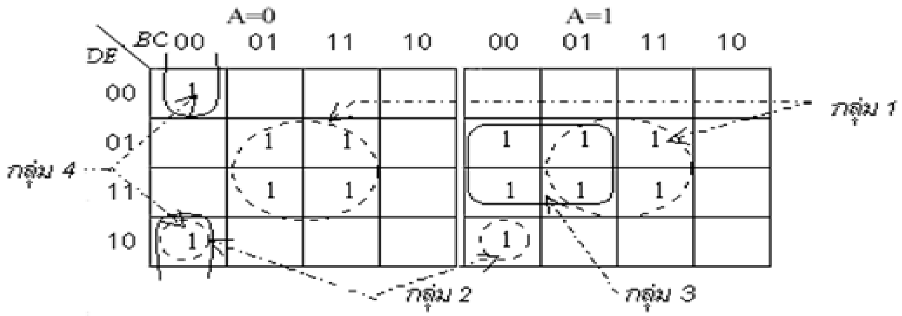
	A=0				A=1			
DE \ BC	00	01	11	10	00	01	11	10
00	0	4	12	8	16	20	28	24
01	1	5	13	9	17	21	29	25
11	3	7	15	11	19	23	31	27
10	2	6	14	10	18	22	30	26

ลำดับของแต่ละเทอมในผัง

สมการ f(A,B,C,D,E)= Σm (0,2,5,7,13,15,17,18,19,21,23,29,31)

	A=0				A=1			
DE \ BC	00	01	11	10	00	01	11	10
00	1							
01		1	1		1	1	1	
11		1	1		1	1	1	
10	1				1			

ลงค่าลอจิกเอาท์พุตจากสมการ



การจับกลุ่ม

การจับกลุ่มประชิดต่างตาราง มี 2 กลุ่ม คือ

กลุ่ม 1 จำนวน 8 เทอม

กลุ่ม 2 จำนวน 2 เทอม

การจับกลุ่มประชิดในตารางเดียวกัน มี 2 กลุ่ม คือ

กลุ่ม 3 จำนวน 4 เทอม เป็นกลุ่มประชิดภายใน ในตาราง A=1

กลุ่ม 4 จำนวน 2 เทอม เป็นกลุ่มประชิดภายนอก ในตาราง A=0

การพิจารณาตีความ เอาท์พุตของวงจรเป็น "1" (X = "1")เมื่อ

กลุ่ม 1 C=1,E=1 และ ตัวแปรอื่นไม่สนใจ ดังนั้น X = CE

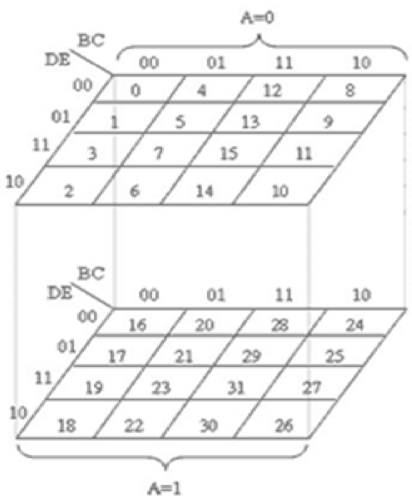
กลุ่ม 2 B=0,C=0,D=1,E=0 และ ตัวแปรอื่นไม่สนใจ ดังนั้น X = $\bar{B}\bar{C}D\bar{E}$

กลุ่ม 3 A=1,B=0,E=1 และ ตัวแปรอื่นไม่สนใจ ดังนั้น X = $A\bar{B}E$

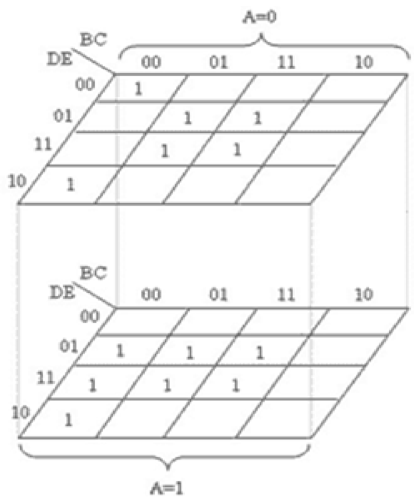
กลุ่ม 4 A=0,B=0,C=0,E=0 และ ตัวแปรอื่นไม่สนใจ ดังนั้น X = $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{E}$

สมการ f(A,B,C,D,E) หรือ X = CE + $\bar{B}\bar{C}D\bar{E}$ + $A\bar{B}E$ + $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{E}$

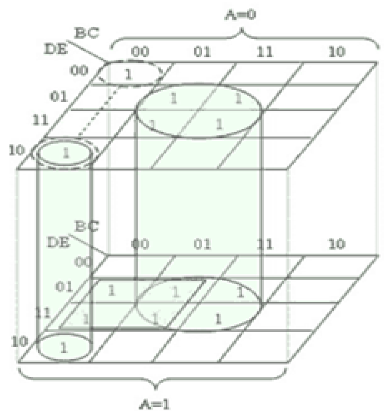
จัดวางผังให้เป็นรูป 3 มิติ



รูป a



รูป b



รูป c

การจับกลุ่มจะดูง่ายกว่าเพราะจับกลุ่มต่างตารางในแนวตั้งที่ตรงกัน ส่วนการตีความก็ทำเช่นเดียวกัน

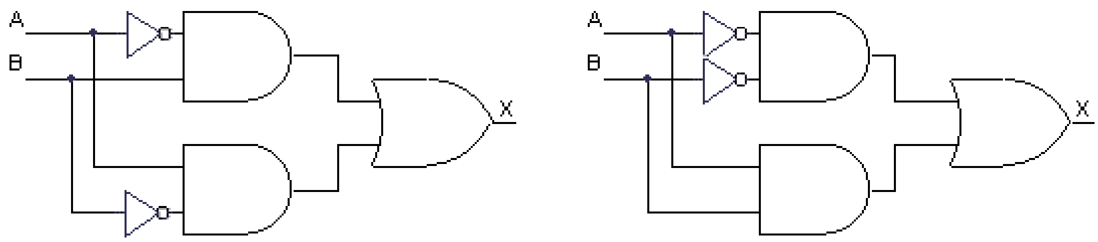
f(A,B,C,D,E) หรือ X = CE + $\bar{B}\bar{C}D\bar{E}$ + $A\bar{B}E$ + $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{E}$

7.8 การใช้ K-map กับ XOR และ XNOR เกต

XOR และ XNOR เกตเป็นเกตที่ได้จากเกตพื้นฐาน (OR, AND, NOT) ดังสมการและวงจรจอลิกข้างล่างนี้ การนำ XOR และ XNOR เกตไปออกแบบจึงทำให้เกิดความประหยัดและมีการทำงานที่ให้ความเร็ว (Speed) อย่างเพียงพอ ฟังชันของ XOR และ XNOR จะพบจาก K-map ดังนี้

1. คู่ระดับลอจิก "1" ในตารางที่อยู่ทะแยงกัน
2. คู่ระดับลอจิก "1" ในตารางที่ถูกขั้นด้วยหนึ่งช่องตาราง

วงจรพื้นฐานของ XOR และ XNOR



XOR : $X = \overline{A}B + A\overline{B} = A \oplus B$ XNOR : $X = AB + \overline{A}\,\overline{B} = \overline{A \oplus B}$

CD \ AB	00	01	11	10	
00	0	1	0	1	$\overline{A}\,\overline{C}(B\overline{D}+\overline{B}D)$
01	1	0	1	0	$A\overline{C}(BD+\overline{B}\,\overline{D})$
11	0	1	0	1	$AC(B\overline{D}+\overline{B}D)$
10	1	0	1	0	$\overline{A}C(BD+\overline{B}\,\overline{D})$

$$X = \overline{A}\,\overline{C}(B \oplus D) + A\overline{C}(\overline{B \oplus D}) + AC(B \oplus D) + \overline{A}C(\overline{B \oplus D})$$

$$= (\overline{A \oplus C})(B \oplus D) + (A \oplus C)(\overline{B \oplus D})$$

ให้ $P = A \oplus C, Q = B \oplus D$

$$= \overline{P}Q + P\overline{Q} = P \oplus Q$$

$$= (A \oplus C) \oplus (B \oplus D)$$

$$= A \oplus C \oplus B \oplus D$$

CD \ AB	00	01	11	10	
00	0	1	0	1	$\overline{C}\,\overline{D}(A \oplus B)$
01	1	0	1	0	$\overline{C}D(\overline{A \oplus B})$
11	0	1	0	1	$CD(A \oplus B)$
10	1	0	1	0	$C\overline{D}(\overline{A \oplus B})$

$$X = \overline{C}\overline{D}(A \oplus B) + \overline{C}D(\overline{A \oplus B}) + CD(A \oplus B) + C\overline{D}(\overline{A \oplus B})$$
$$= (A \oplus B)(\overline{C}\overline{D} + CD) + (\overline{A \oplus B})(\overline{C}D + C\overline{D})$$
$$= (A \oplus B)(\overline{C \oplus D}) + (\overline{A \oplus B})(C \oplus D)$$
ให้ $P = A \oplus B, Q = (C \oplus D)$
$$= P\overline{Q} + \overline{P}Q = P \oplus Q$$
$$= (A \oplus B) \oplus (C \oplus D)$$
$$= A \oplus B \oplus C \oplus D$$

7.9 สรุป

การลดรูปสมการบูลีนั้นทำได้หลายวิธีและวิธีการใช้แผนผังคาร์นอร์ (k-map) ก็เป็นวิธีการที่ดีและง่ายแต่จะเหมาะกับตัวแปร 2 ตัวแปรขึ้นไปแต่ไม่ควรเกิน 4 ตัวแปรแต่ถ้าเกิน 4 ตัวแปรจะทำให้ยุ่งยากขึ้นวิธีการคาร์นอร์ใช้แผนผังหรือเรียกว่าแผนผังคาร์นอร์ ในการลดรูปของสมการแต่ละตำแหน่งในแผนผังจะเรียกว่าเซลล์(Cell) ซึ่งในแต่ละเซลล์จะถูกเติมด้วย 0 หรือ 1 ตามที่ได้จากสมการเพื่อที่จะนำมาลดรูป รวมเลข 1 ที่อยู่ติดกันเข้าด้วยกันเป็นกลุ่มเรียกว่า “subcubes” ตามกฎที่กำหนดไว้ subcube จะต้องมีขนาด1, 2, 4, 8, 16, ฯลฯ และจะต้องให้เกิด subcube ใหญ่ที่สุดเท่าที่สามารถจัดกลุ่มได้ก่อนหลังจากนั้นจึงจัดกลุ่มให้เป็น subcube ขนาดเล็กลงมาตามลำดับ โดยที่เลข 1 ทั้งหมดจะต้องอยู่ภายใน subcube เราสามารถสร้างแผนผังคาร์นอร์ได้จากตารางความจริงและสามารถลดรูปของสมการตรรกะได้โดยการเขียนอยู่ในรูปของ Sum of product โดยค่า 1 ในตารางของแผนผังคาร์นอร์ จะแทนแต่ละเทอม Product ของสมการและจะต้องมีการรวมกลุ่มของเลข 1 ที่อยู่ติดกันเป็น Subcube ที่มีขนาด 1, 2, 4 หรือ 8 จากนั้นเขียนผลลัพธ์ของสมการที่สั้นที่สุดดังตัวอย่างข้างล่าง ในแผนผังจะประกอบด้วย 3 ตัวแปรคือ A, B และ C ซึ่ง $\overline{A}B\overline{C}$ จะถูกแทนโดย 1 ลงในเซลล์เดี่ยวซึ่งเกิดจากค่า $\overline{A}$, B และ $\overline{C}$ ร่วมกัน และ AC ก็จะเกิดจากค่า 1 ที่อยู่ใน 2 เซลล์ติดกัน ซึ่งเกิดจากค่า A และ C เหมือนกันทั้ง 2 เซลล์ และ B ก็จะเกิดจาก 1 ที่อยู่ตัดกัน 4 ตัวโดยทั้ง 4 เซลล์นี้จะมีค่า B เหมือนกันทุกเซลล์

แบบฝึกหัด

จงใช้ Karnaugh map เพื่อแก้ปัญหาโจทย์ต่อไปนี้ (ลดรูปและเขียนวงจร)

1. f(a,b,c) = Σm (1,2,3,4,6)
2. g(w,x,y,z) = Σm (1,3,5,6,7,13,14)+ Don't - care term(8,10,12)
3. F= WX'Y'Z+W'XYZ+W'X'Y'Z'+W'XY'Z+ WXYZ
4. g = a'c + a'bd' + bc'd + ab'd + ab'cd'
5. h = x+ yz' + x'z