บทที่ 1
ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

การคำนวณเชิงตัวเลขนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อที่จะประมาณค่าคำตอบของปัญหาต่างๆ ให้ได้ค่าที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุดเท่าที่จะทำได้ ในส่วนของการคำนวณเกี่ยวกับจำนวนจริงในเครื่องคิดเลขและคอมพิวเตอร์นั้น เครื่องจะคำนวณโดยประมาณค่าจำนวนจริงด้วยจำนวนตรรกยะที่มีตัวเลขจำกัด เช่น ผลบวกของ $\sqrt{2}$ กับ $\frac{1}{3}$ จะเขียนได้เป็น $\sqrt{2}+\frac{1}{3}$ ซึ่งเราเรียกว่า *ผลลัพธ์จริง* (exact value) เราไม่สามารถเขียนให้เป็นเลขจำนวนเดียวได้ ถ้าจะให้เครื่องคำนวณบวกจำนวนดังกล่าวเครื่องคำนวณจะประมาณค่าของ $\sqrt{2}$ และ $\frac{1}{3}$ แยกกันแล้วจึงบวกกัน ถ้าเครื่องสามารถทำได้ถึงทศนิยม 7 หลัก ค่าประมาณของ $\sqrt{2}$ เป็น 1.4142136 และค่าประมาณของ $\frac{1}{3}$ เป็น 0.3333333 ดังนั้นรวมกันได้เป็น 1.7475469 ค่านี้เป็นค่าประมาณของผลลัพธ์จริง $\sqrt{2}+\frac{1}{3}$ การที่คอมพิวเตอร์ต้องประมาณค่าของจำนวนจริงแทนที่จะใช้ค่าจริงก็เพราะว่าคอมพิวเตอร์มีที่เก็บตัวเลขจำกัด ค่าจริงของ $\sqrt{2}$ กับ $\frac{1}{3}$ เป็นทศนิยมไม่รู้จบ คอมพิวเตอร์จึงไม่สามารถเก็บค่าจริงได้

โดยปกติเครื่องคอมพิวเตอร์จะเก็บจำนวนเป็น 2 แบบ คือจำนวนเต็ม (integer number) และจำนวนจุดลอย (floating point number) จำนวนเต็มที่มีค่าระหว่างค่าบวกและค่าลบของจำนวนเต็มใหญ่สุด (ที่เครื่องจะเก็บไว้ได้) คอมพิวเตอร์จะเก็บไว้ในแบบจำนวนเต็ม การเก็บแบบนี้ไม่มีความคลาดเคลื่อน คอมพิวเตอร์จะคำนวณได้เที่ยงตรงถ้าผลลัพธ์ไม่เกินค่าสูงสุดที่จะเก็บไว้ได้ แต่ถ้าจำนวนที่จะเก็บเป็นจำนวนที่ใหญ่กว่าค่าสูงสุด คอมพิวเตอร์จะเก็บไว้ในรูปของจำนวนจุดลอยรวมทั้งจำนวนจริงที่ไม่ใช่ จำนวนเต็มคอมพิวเตอร์ก็จะเก็บไว้ในรูปจำนวนจุดลอยเช่นเดียวกัน ซึ่งการคำนวณโดยใช้จำนวนจุดลอยจะได้ผลลัพธ์เป็นเพียงค่าประมาณเท่านั้น

จำนวนจุดลอยคือจำนวนที่เขียนอยู่ในรูป

$$y = \pm 0.d_1d_2\cdots d_n \times b^s, \quad m \le s \le M \tag{1.1}$$

เมื่อ n เป็นค่าคงตัว และ

$$1 \le d_1 \le b-1$$
$$0 \le d_k \le b-1, \quad k = 2,3,\ldots,n$$

จำนวน b เป็นฐานของระบบ (ในเอกสารเล่มนี้จะศึกษาเฉพาะเลขฐานสิบเท่านั้น) $d_1, d_2, \ldots, d_n$ เป็นตัวเลขในระบบเรียกว่า *เศษส่วน (fraction)* หรือ *แมนทิสซา (mantissa)* n เป็นค่าบอกจำนวนตัวเลข

ที่เขียนแสดง และจำนวน s เป็นกำลังของฐานเรียกว่า ตัวกำลัง หรือ แคแรกเทอริสติค (characteristic) ตัวอย่างการเขียนจำนวนในรูปจำนวนจุดลอยเช่น

118.35 เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยฐานสิบได้เป็น 0.11835×10^3

0.00003547 เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยฐานสิบได้เป็น 0.3547×10^{-4}

1.1 ความคลาดเคลื่อน

การคำนวณในคอมพิวเตอร์โดยใช้จำนวนจุดลอยแทนจำนวนจริงนั้น ทำให้มีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้น ความคลาดเคลื่อนอาจเกิดขึ้นตั้งแต่เริ่มแรกของการประมาณค่าและอาจเกิดจากการประมาณค่าในระหว่างการคำนวณ เมื่อนำตัวเลขนี้ไปคำนวณหลายๆ ครั้งเข้า ความคลาดเคลื่อนก็จะขยายมากขึ้น ดังนั้นเราจึงควรศึกษาให้เข้าใจถึงธรรมชาติอันนี้เพื่อที่จะรู้ว่า ผลลัพธ์สุดท้ายที่ได้จากการคำนวณนั้นมีความแม่นยำเพียงไร เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน เราจะให้ความหมายของค่าของความคลาดเคลื่อนชนิดต่างๆ ดังนี้ (ค่าของความคลาดเคลื่อนเราเรียกสั้นๆ ว่า *ค่าคลาดเคลื่อน*)

1) *ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์* (absolute error) แทนด้วยสัญลักษณ์ E_{abs} มีค่าเท่ากับ

$$E_{\text{abs}} = \left|\text{ค่าจากการทำงาน} - \text{ค่าจริง}\right|$$

2) *ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์* (relative error) แทนด้วยสัญลักษณ์ E_{rel} มีค่าเท่ากับ

$$E_{\text{rel}} = \left|\frac{\text{ค่าจากการทำงาน} - \text{ค่าจริง}}{\text{ค่าจริง}}\right|$$

3) *ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละ* (percentage error) แทนด้วยสัญลักษณ์ E_{per} มีค่าเท่ากับ

$$E_{\text{per}} = E_{\text{rel}} \times 100$$

ความคลาดเคลื่อนอาจเกิดขึ้นได้จากหลายปัจจัย ยกตัวอย่างเช่น

1) *ความคลาดเคลื่อนจากข้อมูลเบื้องต้น* ในการวัดทางวิทยาศาสตร์ซึ่งเป็นแหล่งของข้อมูลที่จะนำมาคำนวณมักจะมีความคลาดเคลื่อนเสมอ อันนี้เป็นเรื่องธรรมชาติและคอมพิวเตอร์ไม่มีส่วนเกี่ยวข้องแต่ผู้คำนวณต้องไม่ลืมที่จะ ระมัดระวังและระลึกถึงในการแปรผลขั้นสุดท้าย วิธีที่จะทำให้แน่ใจว่าผลลัพธ์ขั้นสุดท้ายเชื่อถือได้เพียงใด วิธีหนึ่งก็โดยการวิเคราะห์ความไว (sensitivity analysis) คือวิเคราะห์ว่าถ้าข้อมูลเปลี่ยนไปเล็กน้อยแล้วผลขั้นสุดท้ายจะเปลี่ยนไปอย่างไร

2) *ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ* (round-off error) คือ ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นเพราะใช้จำนวนจุดลอยแทนจำนวนจริง

3) *ความคลาดเคลื่อนตัดปลาย* (truncation error) ในบางวิธีการคำนวณคำตอบที่แท้จริงของปัญหามีขั้นตอนการคำนวณมากถึงอนันต์ขั้นตอน เพื่อให้ปฏิบัติได้ง่ายจำต้องตันทอนขั้นตอนการทำงานลง ให้มีจำนวนจำกัด จึงทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนขึ้นได้ ยกตัวอย่างเช่น เมื่อจะหาค่าของ

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

เมื่อเราบวกพจน์ต่างๆ ทางขวามือเข้าด้วยกันจำนวนหนึ่ง (ที่เหลือตัดทิ้ง) ความคลาดเคลื่อนก็จะเกิดขึ้น ลักษณะเช่นนี้เรียกว่า ความคลาดเคลื่อนตัดปลาย ความคลาดเคลื่อนลักษณะเช่นนี้เป็นเรื่องที่เกิดขึ้นเสมอๆ วิธีการคำนวณต่างกันจะเกิดความคลาดเคลื่อนต่างกัน ดังนั้นในการศึกษาวิธีการคำนวณจึงเป็นประเด็นสำคัญที่เราจะต้องพิจารณา เพื่อที่จะสามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนและเลือกหาวิธีการที่เหมาะสมที่มีความคลาดเคลื่อนน้อยในการประมาณค่าของคำตอบ

4) *ความคลาดเคลื่อนแพร่ขยาย* (propagated error) ในการคำนวณแต่ละขั้นนอกจากความคลาดเคลื่อนที่อาจเกิดจากการคำนวณเองแล้ว ความคลาดเคลื่อนที่มีอยู่เดิมอาจถูกขยายเพิ่มมากขึ้นจากการกระทำ บวก ลบ คูณ และหารในคอมพิวเตอร์ บางครั้งความคลาดเคลื่อนจะถูกขยายต่อเนื่องกันจนกระทั่งผลลัพธ์สุดท้ายผิดพลาดโดนสิ้นเชิง ซึ่งเป็นเรื่องที่เราต้องระมัดระวัง เรากล่าวว่าวิธีการที่ความคลาดเคลื่อนถูกขยายเพิ่มมากขึ้นอย่างไม่จำกัดเป็นวิธีการที่ *ไม่มีความเสถียร* (unstable) ในวิธีการที่ดีนั้นความคลาดเคลื่อนเดิมจะน้อยลงๆ เรากล่าวว่าเป็นวิธีการที่ *มีความเสถียร* (stable)

5) *ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากความผิดพลาดของมนุษย์* เมื่อเราเขียนโปรแกรมให้คอมพิวเตอร์ทำงานและเราเป็นคนป้อนข้อมูลเข้าไป ความผิดพลาดอาจเกิดขึ้นจากตัวเราเอง กล่าวคือโปรแกรมอาจมีบางส่วนผิดพลาดซึ่งคอมพิวเตอร์อาจตรวจไม่พบหรือป้อนข้อมูลผิด ผลลัพธ์ที่ออกมาก็ผิดพลาด วิธีแก้ข้อนี้อยู่ที่ตัวผู้คำนวณเองที่จะต้องระมัดระวังการเขียนโปรแกรมและการป้อนข้อมูลรวมทั้งต้องมีการตรวจสอบโดยอาจมีการทดลองโปรแกรมกับปัญหาง่ายๆ ที่เราทราบคำตอบอยู่แล้วและเมื่อคำนวณจริงได้ผลขั้นสุดท้ายแล้วก็ควรพิจารณาเปรียบเทียบหรือตรวจดูว่าผลลัพธ์สอดคล้องกับทฤษฎีหรือไม่ น่าเชื่อเพียงไร

เราจะพิจารณาความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการใช้จำนวนจุดลอย จากสมการ (1.1) จำนวนจุดลอยเขียนอยู่ในรูป

$$y = \pm 0.d_1 d_2 \cdots d_n \times b^s, \quad m \le s \le M$$

เมื่อ $d_1 \neq 0$ จำนวนที่เขียนโดยจำนวนจุดลอยดังกล่าว เรียกว่า จำนวนเครื่อง (machine number) จำนวนเครื่องไม่สามารถมีค่าเป็นจำนวนจริงได้ทั้งหมด จำนวนจริงจะมีค่าอยู่ระหว่างจำนวนเครื่องสองจำนวน คอมพิวเตอร์จะใช้จำนวนเครื่องจำนวนหนึ่งประมาณค่าจำนวนจริงโดยมีวิธีการอย่างใดอย่างหนึ่ง ดังนี้

1) *การตัด* (chopping) เป็นวิธีการที่ใช้จำนวนเครื่องที่มีค่าน้อยกว่าจำนวนจริงมาประมาณค่า นั่นคือตัดตัวเลขที่เกินกว่าที่คอมพิวเตอร์จะเก็บไว้ได้ทิ้งไปในทุกกรณี

2) *การปัดเศษ* (rounding) เป็นวิธีการที่ใช้จำนวนเครื่องที่มีค่าใกล้จำนวนจริงมากที่สุดมาประมาณค่าจำนวนจริงนั้น ในกรณีที่เสมอกัน คือตัวที่จะตัดมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของฐาน ให้เลือกจำนวนเครื่องที่ตัวเลขตัวสุดท้ายเป็นเลขคู่ วิธีนี้เป็นเช่นเดียวกับที่เราใช้กันอยู่ในการคิดเลขตามปกติ ตัวอย่างเช่น สมมุติว่าคอมพิวเตอร์ใช้ระบบเลขฐานสิบและมีตัวเลขแมนทิสซาเพียง 4 ตัวเท่านั้น

จำนวนจริง 1.20847 ถูกแทนด้วยจำนวนเครื่องเป็น 0.1208×10^1

จำนวนจริง 12.0857 ถูกแทนด้วยจำนวนเครื่องเป็น 0.1209×10^2

จำนวนจริง 120.85 ถูกแทนด้วยจำนวนเครื่องเป็น 0.1208×10^3 (ไม่ใช้ 0.1209×10^3)

ความคลาดเคลื่อนจากการใช้จำนวนจุดลอยเป็นค่าประมาณของจำนวนจริง ไม่ว่าจะเป็นแบบที่ 1 หรือแบบที่ 2 เราเรียกว่า *ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ*

หมายเหตุ ตัวเลขหลังจุดในจำนวนจุดลอย เรียกว่า *ตัวเลขนัยสำคัญ* เช่น $0.002504 = 0.2504 \times 10^{-2}$ มีตัวเลขนัยสำคัญ 4 ตัว การนับตัวเลขนัยสำคัญบางทีเราอาจนับได้ง่ายโดยเริ่มจากเลขตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์

ตัวอย่าง 1.1.1 สมมุติว่าคอมพิวเตอร์ใช้ระบบเลขฐานสิบและมีตัวเลขแมนทิสซา 4 ตำแหน่ง จงหาค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และค่าคลาดเคลื่อนร้อยละ ของ 11.5528 (โดยใช้วิธีการปัดเศษ)

วิธีทำ จากค่า 11.5528 เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยได้เป็น 0.115528×10^2 เนื่องจากคอมพิวเตอร์นี้มีตัวเลขแมนทิสซา 4 ตำแหน่ง ดังนั้นค่าจากการทำงาน คือ 0.1155×10^2

ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เท่ากับ

$$\begin{aligned} E_{abs} &= \left|\text{ค่าจากการทำงาน} - \text{ค่าจริง}\right| \\ &= \left|0.1155 \times 10^2 - 11.5528\right| \\ &= 0.0028 \end{aligned}$$

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ

$$\begin{aligned} E_{rel} &= \left|\frac{\text{ค่าจากการทำงาน} - \text{ค่าจริง}}{\text{ค่าจริง}}\right| \\ &= \frac{0.0028}{11.5528} \\ &= 2.4236 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละเท่ากับ

$$\begin{aligned} E_{per} &= E_{\text{rel}} \times 100 \\ &= 2.4236 \times 10^{-4} \times 100 \\ &= 2.4236 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

$\square$

ตัวอย่าง 1.1.2 สมมุติว่าคอมพิวเตอร์ใช้ระบบเลขฐานสิบและมีตัวเลขแมนทิสซา 4 ตำแหน่ง จงหาค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และค่าคลาดเคลื่อนร้อยละ ของค่าจากการคำนวณ $47.5581 - 15.89$ (โดยใช้วิธีการปัดเศษ)
วิธีทำ ค่าจริง คือ $47.5581 - 15.89 = 31.6681$

พิจารณาหาค่าจากการทำงาน จากค่า 47.5581 เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยได้เป็น 0.475581×10^2 เครื่องจะเก็บเป็น 0.4756×10^2 และค่า 15.89 เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยคือ 0.1589×10^2 เครื่องจะเก็บเป็น 0.1589×10^2

พิจารณาค่า $0.4756 \times 10^2 - 0.1589 \times 10^2 = 47.56 - 15.89 = 31.67$ เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยได้เป็น 0.3167×10^2 ดังนั้นค่าจากการทำงานคือ 0.3167×10^2 เพราะฉะนั้น

ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เท่ากับ

$$\begin{aligned} E_{abs} &= \left|\text{ค่าจากการทำงาน} - \text{ค่าจริง}\right| \\ &= \left|0.3167 \times 10^2 - 31.6681\right| \\ &= 0.0019 \end{aligned}$$

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ

$$\begin{aligned} E_{rel} &= \left|\frac{\text{ค่าจากการทำงาน} - \text{ค่าจริง}}{\text{ค่าจริง}}\right| \\ &= \frac{0.0019}{31.6681} \\ &= 5.9997 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละเท่ากับ

$$\begin{aligned} E_{per} &= E_{\text{rel}} \times 100 \\ &= 5.9997 \times 10^{-5} \times 100 \\ &= 5.9997 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$\square$

1.2 ตัวอย่างปัญหาความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณโดยคอมพิวเตอร์

ความคลาดเคลื่อนนั้นนอกจากจะมาจากการเก็บจำนวนเป็นจำนวนเครื่องแล้ว ในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน เช่น การบวก ลบ คูณ หาร ก็อาจมีค่าคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นอีกได้ ซึ่งเราจะแสดงตัวอย่างเพื่อให้เห็นได้ง่าย สมมุติว่าคอมพิวเตอร์ใช้ระบบจำนวนจุดลอยฐานสิบ ซึ่งมีแมนทิสซา 4 ตำแหน่ง โดยใช้วิธีการตัด ในตัวอย่างดังต่อไปนี้

1) ความคลาดเคลื่อนจากการบวกหรือลบของจำนวนสองจำนวนซึ่งจำนวนหนึ่งมีค่ามากและอีกจำนวนหนึ่งมีค่าน้อย เช่น สมมุติว่าจะบวกจำนวน 100 เข้ากับ 0.05 เริ่มแรกคอมพิวเตอร์จะเก็บตัวเลขเข้าเครื่อง ดังนี้

$$100 = 0.1000 \times 10^3$$

$$0.05 = 0.5000 \times 10^{-1}$$

คอมพิวเตอร์ยังไม่สามารถบวกกันได้ เพราะว่าตัวยกกำลังยังไม่เท่ากัน คอมพิวเตอร์จะแปลงให้มีกำลังเท่ากันแล้วจึงบวกกัน ดังนี้

$$100 = 0.1000 \times 10^3$$

$$0.05 = 0.00005 \times 10^3$$

$$\text{ผลลัพธ์ } = 0.10005 \times 10^3$$

แต่คอมพิวเตอร์สามารถเก็บตัวเลขได้เพียงทศนิยม 4 ตำแหน่งเท่านั้น ดังนั้นผลลัพธ์ในคอมพิวเตอร์จะเป็น 0.1000×10^3 เท่ากับว่าเราไม่ได้ทำการบวกเลย

ความคลาดเคลื่อนดังกล่าวเป็นเรื่องธรรมดาที่เกิดขึ้นเสมอๆ และดูเหมือนว่าเป็นเรื่องไม่สำคัญนักเพราะ

$$\text{ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์} = \left| \frac{(0.10005 - 0.1000) \times 10^3}{0.10005 \times 10^3} \right| = \frac{5}{10005}$$

ซึ่งคิดเป็นค่าคลาดเคลื่อนร้อยละประมาณ 0.05 ซึ่งนับว่าไม่มากนัก แต่ในบางครั้งก็เป็นเรื่องสำคัญดังตัวอย่างการบวกเพื่อหาค่าของ

$$100 + 0.01 + 0.02 + 0.03 + 0.04 + 0.05 + 0.06 + 0.07 + 0.08 + 0.09$$

คอมพิวเตอร์จะทำการบวกตามธรรมดาจากซ้ายไปขวา ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ 100 แต่ค่าจริงของผลบวกเป็น 100.45 ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์จะเป็น $\frac{45}{10045}$ ซึ่งคิดเป็นค่าคลาดเคลื่อนร้อยละประมาณ 0.448 ซึ่งก็นับว่ามาก ถ้าหากว่าเราลองบวกจำนวนที่น้อย อย่างเช่น 0.09 ไปเรื่อยๆ สัก 100 ครั้ง คราวนี้ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจะเป็นเรื่องสำคัญมาก

วิธีแก้ความคลาดเคลื่อนลักษณะนี้ก็คือ พยายามหลีกเลี่ยงการบวก (หรือ ลบ) ด้วยจำนวนที่ต่างกันมากๆ ดังตัวอย่างข้างบน เราอาจทำได้โดยการบวกค่าน้อยๆ เข้าด้วยกันก่อน ดังนี้ (กระทำ

ในคอมพิวเตอร์)

$$0.01+0.02+0.03+0.04+0.05+0.06+0.07+0.08+0.09=0.00045\times 10^3$$

แล้วบวกเข้ากับ 100 ได้ผลลัพธ์เป็น 0.1004×10^3 หรือ 100.4 ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์จะเป็น $\frac{5}{10045}$ หรือค่าคลาดเคลื่อนร้อยละประมาณ 0.049 เท่านั้น

2) ความคลาดเคลื่อนเกิดจากการลบจำนวนสองจำนวนซึ่งมีค่าใกล้เคียงกัน จะเหลือตัวเลขนัยสำคัญ (ตัวเลขที่แสดงความแม่นยำ) น้อยตัว เช่น $1.35742-1.35614=0.00128$ แต่ถ้าคำนวณโดยใช้จำนวนจุดลอยในคอมพิวเตอร์ จะได้ $0.1357\times 10^1-0.1356\times 10^1=0.1000\times 10^{-2}$ ซึ่งมีตัวเลขนัยสำคัญเพียง 1 ตัว และถ้าหาความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์จะได้

$$\left|\frac{0.00128-0.001}{0.00128}\right|=0.2188$$

หรือค่าคลาดเคลื่อนร้อยละประมาณ 21.88 ซึ่งมีค่ามาก ในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งมีการลบกันระหว่างจำนวนที่มีค่าใกล้เคียงกันสองจำนวน ถ้าเราไม่ระวังอาจจะเกิดความผิดพลาดโดยเราไม่รู้ตัวเช่น เมื่อจะหาค่า $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เมื่อ Δx มีค่าน้อยๆ (ในการหาค่าอนุพันธ์) เราได้ $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ ถ้า $x_1=1.4280$ และ $x_2=1.4285$ เราหวังว่า $\Delta x=0.0005=0.5\times 10^{-3}$ แต่จากการคำนวณของคอมพิวเตอร์ ได้ $\Delta x=0.1428\times 10^1-0.1428\times 10^1=0$ ผลก็คือคอมพิวเตอร์จะเตือนกลับมาว่าความผิดพลาดเกิดขึ้นเนื่องจากตัวหารเป็น 0

วิธีแก้ความคลาดเคลื่อนแบบนี้กระทำได้โดยพยายามหลีกเลี่ยงการลบกันของสองจำนวนที่มีค่าใกล้เคียงกัน ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน $\cos^2 x-\sin^2 x$ เราคำนวณโดยใช้ฟังก์ชันที่เป็นเอกลักษณ์ของมันแทน คือ ฟังก์ชัน $\cos 2x$ ในกรณีที่หาฟังก์ชันเอกลักษณ์ได้ยาก เราแปลงฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ แล้วลบกันเสียก่อน เป็นฟังก์ชันใหม่ แล้วจึงคำนวณค่าจากฟังก์ชันใหม่นี้

3) Overflow และ Underflow เกิดขึ้นเมื่อจำนวนมีค่าใหญ่เกินไปหรือมีค่าเล็กเกินไปกว่าที่คอมพิวเตอร์จะเก็บไว้ในรูปจำนวนจุดลอยได้ สมมุติว่าคอมพิวเตอร์สามารถเก็บจำนวนได้ในช่วง 10^{-9} ถึง 10^9 ถ้าเราคูณเลขสองจำนวนคือ 0.3450×10^8 กับ 0.1000×10^5 ได้ 0.3450×10^{12} คอมพิวเตอร์จะบอกว่า overflow เกิดขึ้นและหยุดไม่ทำการคำนวณต่อไป ในกรณี underflow บางทีคอมพิวเตอร์จะบอกว่าเกิด underflow และหยุดการคำนวณ แต่คอมพิวเตอร์บางเครื่องจะถือว่าจำนวนนั้นมีค่าเป็น 0 และไม่บอกความผิดพลาดนั้น เช่น เมื่อจะหาค่า $A\times B\times C$ โดยที่

$$A=0.1000\times 10^{-6}$$

$$B=0.2000\times 10^{-5}$$

$$C=0.3000\times 10^{7}$$

คอมพิวเตอร์จะหาค่า $A\times B$ ก่อน ได้ 0.2000×10^{-12} ซึ่งคอมพิวเตอร์จะเก็บไว้เป็นค่า 0 เมื่อคูณกับ C ก็จะเป็น 0 ถ้าเราเขียนคำสั่งให้ A คูณกับ C ก่อน จึงคูณกับ B จะได้ค่าเป็น 0.6000×10^{-6}

ซึ่งเป็นค่าที่ถูกต้อง ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า การเขียนคำสั่งที่ดีอาจช่วยลดความผิดพลาดได้

4) ความคลาดเคลื่อนการปัดเศษจากการคูณและการหาร ตามปกติเมื่อเราคูณหรือหารจำนวนสองจำนวน ตัวเลขของผลลัพธ์จะมากกว่าตัวเลขของจำนวนเดิมและบางทีมากเกินกว่าที่คอมพิวเตอร์จะเก็บไว้ได้ นั่นคือเกิดความคลาดเคลื่อนที่เรียกว่า ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษซึ่งเกิดขึ้นบ่อยๆ แม้ว่าจำนวนเริ่มแรกสองจำนวนจะไม่มีความคลาดเคลื่อนเลย ดังตัวอย่างเช่น

$3062 \times 5591 = 17119642$ คอมพิวเตอร์จะเก็บไว้เป็น 0.1711×10^8

$\frac{1}{3} = 0.3333...$ คอมพิวเตอร์จะเก็บไว้เป็น 0.3333×10^0

5) การหารด้วยเลขจำนวนน้อย มีลักษณะคล้ายกับการคูณด้วยเลขจำนวนมาก ทำให้ความคลาดเคลื่อนที่มีมาแต่เดิมขยายใหญ่ขึ้น ตัวอย่างเช่น จะหาค่าของ $C = \frac{A}{B}$ เมื่อ $A = 0.2000 \times 10^2$ และ $B = 0.1000 \times 10^{-4}$ สมมุติว่าค่า B คลาดเคลื่อนมาแต่เดิมเป็น 0.1001×10^{-4} ซึ่งถือว่าคลาดเคลื่อนเล็กน้อย เพราะค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เท่ากับ 10^{-8} และค่าคลาดเคลื่อนร้อยละเป็นเพียงร้อยละ 0.10 แต่ถ้านำค่านี้ไปคำนวณได้ค่า $\frac{A}{B} = 0.1998 \times 10^7$ เทียบกับค่าจริงซึ่งเท่ากับ 0.2000×10^7 ปรากฏว่ามีค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เท่ากับ $0.0002 \times 10^7 = 2000$ ซึ่งเป็นตัวเลขมาก แต่ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละเป็นเพียงร้อยละ 0.10 เท่าเดิม ถ้านำจำนวนดังกล่าวไปคำนวณต่อไปความคลาดเคลื่อนจะแพร่ขยายมากขึ้น เช่น ต้องการหาค่า $0.2005 \times 10^7 - \frac{A}{B}$ ค่าจริงคือ 0.5000×10^4 ค่าจากการคำนวณคือ 0.7000×10^4 ดังนั้น ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละเท่ากับร้อยละ $\frac{0.2}{0.5} \times 100 = 40$ มากกว่าเดิม 400 เท่า

ที่ได้ยกตัวอย่างมานี้เพื่อต้องการให้นักศึกษาได้ระมัดระวังในการใช้คอมพิวเตอร์ ในการคำนวณตัวเลขที่ยกมาข้างบนเป็นการขยายเกินความจริง ที่จริงแล้วความคลาดเคลื่อนของคอมพิวเตอร์มีไม่มากเท่ากับตัวอย่างข้างบน

6) ความคลาดเคลื่อนจากการพิมพ์ผลลัพธ์ ถึงแม้ว่าการคำนวณในคอมพิวเตอร์จะถูกต้อง แต่การพิมพ์ผลลัพธ์อาจทำให้ผู้ใช้เข้าใจผิดได้ เช่น ถ้าผลที่จริงๆ เป็น 0.13498 แต่ถ้าคำสั่งพิมพ์ใช้แบบ (Format) $F6.3$ นั่นคือคอมพิวเตอร์จะพิมพ์ 0.135 (บางเครื่องเป็น 0.134) ในกรณีนี้ ถ้านำค่า 0.135 ไปคำนวณต่อไปความคลาดเคลื่อนจะขยายมากขึ้น ดังนั้นการรู้จักถึงลักษณะการทำงานของคอมพิวเตอร์ที่ใช้จะทำให้เราคำนวณได้แม่นยำขึ้น

ข้อควรระวังทั่วๆ ไปสำหรับผู้ที่จะคำนวณโดยคอมพิวเตอร์หรือเครื่องคิดเลขก็คือ ข้อมูลที่ใส่เข้าไปต้องมีค่าคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด เช่น ถ้าจะคำนวณค่าใดๆ ที่ต้องใช้ค่า π เราควรเขียนค่านี้จากค่าที่เครื่องเก็บไว้ ถ้าไม่มี ควรประมาณด้วย 3.1415927 ไม่ใช่ $\frac{22}{7}$

1.3 แบบฝึกหัดท้ายบท

ข้อ 1 - 2 สมมุติว่าคอมพิวเตอร์ใช้ระบบจุดลอยฐานสิบและมีตัวเลขแมนทิสซา 4 ตำแหน่ง

1. จงแปลงจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปจำนวนจุดลอย โดยใช้วิธีการปัดเศษ

1.1) 352.265

1.2) 0.000052455

1.3) 3.549875×10^4

1.4) $\frac{4}{35}$

1.5) $\frac{11}{4598}$

2. จงหาค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และค่าคลาดเคลื่อนร้อยละของค่าจากการคำนวณต่อไปนี้ (โดยใช้วิธีการปัดเศษ)

2.1) $21.39 - 3.0184$

2.2) $133 + 0.921$

2.3) $(121 - 0.327) - 199$

2.4) 11.56×4.7

3. จงหาวิธีหลีกเลี่ยงการลบกันของสองฟังก์ชัน

3.1) $\frac{\sin x}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$

3.2) $\frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$