# บทที่ 2

## เมทริกซ์และระบบสมการเชิงเส้น

ปัญหาพื้นฐานที่เราพบบ่อยๆ อย่างหนึ่งก็คือ การแก้สมการเชิงเส้นทีมีหลายสมการและหลายตัวแปร (ตัวไม่ทราบค่า) ซึ่งเรียกว่า *ระบบสมการเชิงเส้น* (system of linear equations) มี $m$ สมการ และมีตัวแปร $n$ ตัว ดังนี้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2.1}$$

ค่า $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ที่สอดคล้องกับสมการทุกสมการ เราเรียกว่าเป็น คำตอบ หรือ ผลเฉลยของระบบสมการ ระบบสมการอาจมีผลเฉลยเดียว หลายผลเฉลย หรือ ไม่มีผลเฉลยก็ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ระบบสมการ

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned}$$

มีเพียงผลเฉลยเดียว คือ $x_1 = 1$ และ $x_2 = 2$ ลองแทนค่าในระบบสมการจะพบว่า

$$\begin{aligned} 2(1) + (2) &= 4 \quad \text{เป็นจริง} \\ 1 - 2 &= -1 \quad \text{เป็นจริง} \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นจริงทั้งสองสมการ (ถ้าแทนค่าแล้วมีบางสมการไม่เป็นจริง จุดนั้นจะไม่ใช่ผลเฉลย)

ในทางเรขาคณิต เราเขียนแทนสมการที่มีสองตัวแปรด้วยเส้นตรง เรามีสองสมการก็คือมีเส้นตรงสองเส้น จุดที่เส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นตัดกันจะเป็นผลเฉลยของระบบสมการเพราะว่าจุดนั้นสอดคล้องกับทั้งสองสมการ

สำหรับสมการที่มีสองตัวแปร ถ้าระบบสมการประกอบด้วยสมการเดียว จุดทุกจุดบนเส้นตรงจะสอดคล้องกับสมการ นั่นคือ เราได้ผลเฉลยหลายผลเฉลย ถ้าระบบสมการประกอบด้วยสอง

สมการ หากเขียนเป็นเส้นตรง ถ้าเส้นตรงสองเส้นนั้นตัดกันก็แสดงว่ามีผลเฉลยเดียวคือจุดตัดที่เส้นตรงตัดกัน ถ้าเส้นตรงสองเส้นนั้นขนานกันและไม่ทับกันก็แสดงว่าระบบสมการไม่มีผลเฉลย ถ้าเส้นตรงสองเส้นทับกันเป็นเส้นเดียวก็แสดงว่าระบบสมการมีหลายผลเฉลย ในกรณีที่สมการมีสองตัวแปรแต่ระบบสมการประกอบด้วยสามสมการหรือมากกว่า ถ้าเส้นตรงทั้งหมดตัดกันที่จุดเดียวก็แสดงว่าระบบสมการนั้นมีผลเฉลย แต่โดยทั่วไป ถ้าระบบสมการมีจำนวนสมการมากกว่าจำนวนตัวแปรเรามักคาดว่าระบบสมการนั้นไม่มีผลเฉลย

## 2.1 เมทริกซ์และเวกเตอร์

เพื่อความสะดวกในการกล่าวถึงระบบสมการเชิงเส้น จะกล่าวถึงสัญลักษณ์ที่ใช้เขียนแทนระบบสมการคือ *เมทริกซ์* (matrix) และกล่าวถึงสมบัติที่สำคัญที่จะนำไปใช้

เมทริกซ์เป็นจำนวนที่เขียนอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เราใช้อักษรตัวพิมพ์ใหญ่แทนเมทริกซ์ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1.1 & 0.5 \\ 2.2 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad C = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 0.2 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ประกอบด้วย *แถว* (rows) และ*สดมภ์* (columms) ถ้าเมทริกซ์มีแถว $m$ แถว และมี $n$ สดมภ์ เรากล่าวว่าเป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และเรียกว่าเป็น $m \times n$ เมทริกซ์ ถ้า $m = n$ เราเรียกว่าเป็น *เมทริกซ์จัตุรัสอันดับ* $n$ (square matrix of order $n$) จากตัวอย่างข้างบนจะพบว่า $A$ เป็น $2 \times 3$ เมทริกซ์ $B$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ $3$ (ขนาด $3 \times 3$) และ $C$ เป็น $3 \times 1$ เมทริกซ์ แต่ละจำนวนในเมทริกซ์ (อาจเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน) เรียกว่า *สมาชิก* (element) ของเมทริกซ์ เราใช้สัญลักษณ์ $a_{ij}$ แทนสมาชิก (ของเมทริกซ์ $A$) ที่อยู่ในแถวที่ $i$ และอยู่ในสดมภ์ที่ $j$ ดังตัวอย่างข้างบน $a_{11} = 1$ และ $a_{23} = 5$ เป็นต้น

เมทริกซ์ที่มีแถวเดียวเราเรียกว่า *เวกเตอร์แถว* (row vector) เมทริกซ์ที่มีสดมภ์เดียว เราเรียกว่า *เวกเตอร์สดมภ์* (column vector) หรือ *เวกเตอร์* เฉย ๆ เช่น เมทริกซ์ $C$ ดังข้างบนเป็นเวกเตอร์ เราใช้สัญลักษณ์ตัวพิมพ์หนาแทนเวกเตอร์ เช่น $\mathsf{x} = C$ เป็นเวกเตอร์ สมาชิกในแต่ละตำแหน่งในเวกเตอร์เรียกว่า *ส่วนประกอบ* (component) ของเวกเตอร์นั้น

ในกรณีทั่วไป เราเขียนสัญลักษณ์แสดงเมทริกซ์และเวกเตอร์ดังนี้

$$\text{เมทริกซ์} \;\; A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{เวกเตอร์} \;\; \mathsf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

สำหรับเมทริกซ์ $A$ อาจเขียนสั้นๆ ได้เป็น $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

**การเท่ากันของเมทริกซ์** ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน เรากล่าวว่า เมทริกซ์ $A$ เท่ากับเมทริกซ์ $B$ เขียนแทนด้วย $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ ทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$ กล่าวคือ เมทริกซ์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและมีสมาชิกที่อยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน

**การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนสเกลาร์** ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $c$ เป็นจำนวน *สเกลาร์* (scalar) (จำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน) ผลคูณ $cA$ จะเป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกของ $A$ คูณกับ $c$ คือ

$$cA = [ca_{ij}]_{m\times n}$$

**การบวกและลบเมทริกซ์** ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ผลบวก (ลบ) ของ $A$ กับ $B$ จะเป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยผลบวก (ลบ) ของสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันของ $A$ และ $B$ คือ

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} \quad \text{และ} \quad A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$$

**หมายเหตุ** เมทริกซ์ที่จะบวกหรือลบกันได้จะต้องเป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเดียวกัน

**ตัวอย่าง 3.1.1** ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
จะได้

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & -3+2 & 0+2 \\ 5-2 & 2+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

และ

$$3A - B = \begin{bmatrix} 3-1 & -9-2 & 0-2 \\ 15+2 & 6-0 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -11 & -2 \\ 17 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

**การคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์** ให้ $A$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ และ $B$ เป็น $n \times p$ เมทริกซ์ คือ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ ผลคูณของ $A$ กับ $B$ เขียนแทนด้วย $AB$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times p$ ที่ประกอบด้วยสมาชิก ดังนี้

$$AB = [c_{ij}]_{m\times p} \quad \text{เมื่อ} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad \text{ทุกๆ } i, j$$

**หมายเหตุ** ถ้าจำนวนสดมภ์ของ $A$ ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ $B$ จะคูณกันไม่ได้

**ตัวอย่าง 2.1.1** ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

จะได้

$$AB = \begin{bmatrix} (2)(3) + (-2)(4) + (5)(5) \\ (3)(3) + (3)(4) + (1)(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 26 \end{bmatrix}$$

และ

$$AC = \begin{bmatrix} (2)(-1) + (-2)(1) + (5)(3) & (2)(2) + (-2)(0) + (5)(-2) \\ (3)(-1) + (3)(1) + (1)(3) & (3)(2) + (3)(0) + (1)(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$\square$

**สมบัติเกี่ยวกับการบวกลบและการคูณเมทริกซ์** ให้ $a, b$ เป็นสเกลาร์ $A, B$ และ $C$ เป็นเมทริกซ์ และสมมุติว่าการบวก การลบและการคูณข้างล่างนี้เป็นไปได้ เราจะได้สมบัติต่อไปนี้

1) $A + B = B + A$

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

3) $a(A + B) = aA + aB$

4) $(a + b)A = aA + bA$

5) $(A + B)C = AC + BC$

6) $A(B + C) = AB + AC$

7) $a(AB) = (aA)B = A(aB)$

8) $A(BC) = (AB)C$

**หมายเหตุ** $AB$ อาจไม่เท่ากับ $BA$

**การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว (elementary row operations)** คือการดำเนินการแบบใดแบบหนึ่งใน 3 แบบดังต่อไปนี้

1. สลับแถวที่ $i$ กับแถวที่ $j$ เขียนแทนด้วย $R_i \longleftrightarrow R_j$
2. คูณแถวที่ $i$ ด้วยจำนวนที่ไม่เท่ากับศูนย์ เขียนแทนด้วย $kR_i,\ k \neq 0$
3. คูณแถวที่ $i$ ด้วยจำนวนคงที่แล้วนำไปบวกกับแถวที่ $j$ โดยที่ $i \neq j$ เขียนแทนด้วย $kR_i + R_j$

## 2.2 การมีผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

จากระบบสมการ (2.1) อาจเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ ดังนี้

$$A\mathsf{x} = \mathsf{b}$$

โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ \mathsf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ และ } \mathsf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

เราเรียกเมทริกซ์ $A$ ว่าเป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ เรียก $\mathsf{x}$ ว่าเป็นเวกเตอร์ตัวไม่ทราบค่า และเรียก $\mathsf{b}$ ว่าเป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว เราสร้างเมทริกซ์ที่ประกอบด้วย $A$ และ $\mathsf{b}$ ดังนี้

$$[A : \mathsf{b}]$$

เรียกว่า *เมทริกซ์แต่งเติม* (augmented matrix) ของระบบสมการ $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$

**ทฤษฎีบท 2.2.1** สำหรับระบบสมการที่มีจำนวนตัวแปรเท่ากับจำนวนสมการ ถ้าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์มีตัวผกผันแล้วระบบสมการมีผลเฉลยชุดเดียว

**ตัวอย่าง 2.2.1** ระบบสมการ

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

ให้ $\mathsf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ เขียนระบบสมการในรูปเมทริกซ์คือ $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$ ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ มีตัวผกผันคือ $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ดังนั้นได้ผลเฉลยเป็น

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

คือ $x = 1$ และ $y = 2$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ (มี 1 ผลเฉลย หรือ 1 ชุด)

แม้ว่าการแก้สมการโดยใช้ตัวผกผันคูณจะดูง่าย แต่เราก็ไม่นิยมใช้วิธีนี้ในการแก้สมการ ทั้งนี้เพราะการหาตัวผกผันของ $A$ กระทำได้ไม่ง่ายนักและการคูณเมทริกซ์ต้องใช้แรงงานมาก นอกจากนี้ ถ้าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $A$ เป็นเมทริกซ์ที่ไม่มีตัวผกผัน ระบบสมการอาจมีหลายผลเฉลยหรือไม่มีผลเฉลยก็ได้ ปกติแล้วเราใช้วิธีอื่นในการหาผลเฉลยของระบบสมการ ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป

ระบบสมการบางรูปแบบหาผลเฉลยได้ง่าย และเราอาจแปลงระบบสมการให้อยู่ในแบบที่หาผลเฉลยได้ง่าย โดยที่ระบบสมการใหม่นั้นสมมูลกับระบบสมการเดิม

**เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูป (reduced row echelon form)** คือเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งอยู่ในรูปแบบดังนี้

1. สมาชิกตัวแรกของแถวที่ไม่เป็นศูนย์เท่ากับ 1 เรียกสมาชิกตัวแรกนี้ว่า *ตัวนำหนึ่ง*
2. ถ้าตัวนำหนึ่งในแถวที่ $i$ อยู่ในสดมภ์ที่ $j$ ตัวนำหนึ่งในแถวที่ $i+1$ จะอยู่ในสดมภ์ที่ $k > j$
3. สมาชิกแถวอื่นในสดมภ์ที่มีตัวนำหนึ่งจะเป็นศูนย์

ถ้ามีสมบัติเพียงสองข้อแรกเราเรียกว่า *เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว* ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูป เทริกซ์ขั้นบันได

**ทฤษฎีบท 2.2.2** เมทริกซ์ใดๆ สามารถที่จะแปลงเป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูปได้โดยการดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวและเป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูปเพียงแบบเดียว

**การดำเนินการหาผลเฉลย** ในการหาผลเฉลยของระบบสมการ $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$ วิธีการหนึ่งก็คือ เราจะใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวเปลี่ยนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการให้อยู่ในรูป เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวหรือ เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูป ซึ่งเป็นเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการที่สมมูลกัน เรามีขั้นตอนดังนี้

1. จากระบบสมการ $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$ เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการ $B = [A : \mathsf{b}]$
2. ดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมจนกระทั่งได้ผลลัพธ์เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว หรือเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูป
3. เขียนผลเฉลยจากเมทริกซ์แต่งเติมที่ได้

ขั้นตอนวิธีดังกล่าวมีชื่อว่า *วิธีตัดออกของเกาส์* (Gaussian elimination method) ถ้าในขั้นที่ 2 เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูป วิธีดังกล่าวมีชื่อเฉพาะว่า *วิธีของเกาส์และชอร์ดอง* (Gauss-Jordan method)

**ทฤษฎีบท 2.2.3** ให้ $[A : \mathsf{b}]$ เป็นเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการ $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$ และ $[R : \mathsf{c}]$ เป็นเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการ $R\mathsf{x} = \mathsf{c}$ ถ้า $[R : \mathsf{c}]$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จาก $[A : \mathsf{b}]$ โดยการดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว แล้วระบบสมการ $A\mathsf{x} = \mathsf{b}$ กับระบบสมการ $R\mathsf{x} = \mathsf{c}$ จะมีผลเฉลยชุดเดียวกัน

**ตัวอย่าง 2.2.3** จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &= 6 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

**วิธีทำ** เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการได้เป็น

$$[A : b] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & \vdots & 6 \\ 1 & 1 & -2 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

ดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวกับเมทริกซ์นี้ จนกระทั่งได้เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูป

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{13}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{11}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้ผลเฉลยเป็น

$$x_1 = \frac{13}{8} \;\; x_2 = \frac{11}{8} \text{ และ } x_3 = \frac{1}{8}$$

เราอาจเขียนผลเฉลยได้ง่ายๆ จากเมทริกซ์แบบอื่นๆ เช่นเมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบนและเมทริกซ์ที่เมื่อทำการสลับแถวหรือสดมภ์แล้วจะอยู่ในรูปเมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน ดังตัวอย่างเมทริกซ์แต่งเติมและผลเฉลยข้างล่าง

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & \vdots & -6 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & -4 \end{bmatrix}$$

เขียนผลเฉลยได้เป็น

$$\begin{aligned} z &= -\frac{4}{2} = -2 \\ y &= \frac{2-z}{-1} = \frac{2+2}{-1} = -4 \\ x &= \frac{-6-3y-z}{2} = \frac{-6+12+2}{2} = 4 \end{aligned}$$

## 2.3 วิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

ในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์คำนวณหาผลเฉลยนั้นไม่จำเป็นต้องให้ได้ เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูปในเมทริกซ์สุดท้าย การคำนวณหาผลเฉลยสามารถกระทำได้โดยง่ายจากเมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน (ถ้าทำโดยคอมพิวเตอร์) เมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบนได้มาในระหว่างการดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวเพื่อให้ได้เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูป ดังนั้นจึงใช้แรงงานน้อยกว่า วิธีการดังกล่าวนี้มีชื่อว่า *วิธีตัดออกของเกาส์* (Gaussian elimination)

วิธีการซึ่งใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวนี้เราอาจเรียกว่าเป็น วิธีตรง ผลเฉลยที่ได้จะเป็น ผลเฉลยที่แม่นตรง (exact solution) ถ้าไม่นับความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการปัดเศษ เรามีวิธีการที่จะลดความคลาดเคลื่อนนี้ให้น้อยที่สุดโดยการเลือกตัวยืนในการดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวซึ่งจะกล่าวต่อไป วิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการอีกวิธีหนึ่งก็คือ การกระทำซ้ำเดิม วิธีการอย่างหลังนี้จะได้ผลเฉลยเพียงค่าประมาณเท่านั้น

**วิธีตัดออกของเกาส์** เป็นวิธีที่นิยมใช้เป็นวิธีตรง คือใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเพื่อให้กลายเป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวแล้วเขียนผลเฉลย วิธีการเป็นดัง

นี้ เราสมมุติว่าระบบสมการมีจำนวนตัวแปรและจำนวนสมการเท่ากัน (คาดว่าระบบสมการจะมีผลเฉลยชุดเดียว) ให้เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการคือ

$$[A : \mathsf{b}]$$

ต่อไปใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวพยายามทำให้เมทริกซ์แต่งเติมมีลักษณะเป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว (หรือเกือบเป็นขั้นบันไดแบบแถว ตัวนำไม่จำเป็นต้องเป็น 1) ในรูป $[U : \mathsf{c}]$ แล้วเขียนผลเฉลยจากระบบสมการที่มี $[U : \mathsf{c}]$ เป็นเมทริกซ์แต่งเติม สรุปขั้นตอนวิธีได้ดังนี้

1. เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{bmatrix}$$

2. ใช้วิธีการดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวกระทำกับเมทริกซ์แต่งเติมข้างบน จนกระทั่งได้เมทริกซ์ $[A : \mathsf{b}]$ อยู่ในรูปเมทริกซ์ (เกือบ) ขั้นบันไดแบบแถว คือ

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & \vdots & c_1 \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} & \vdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} & \vdots & c_n \end{bmatrix}$$

จากเมทริกซ์นี้เราสามารถเขียนระบบสมการและหาผลเฉลยได้ง่ายโดยการแทนค่าย้อนหลัง นั่นคือ เขียนกลับเป็นระบบสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n &= c_1 \\ u_{22}x_2 + \cdots + u_{2n}x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ u_{nn}x_n &= c_n \end{aligned}$$

จากสมการสุดท้าย หาค่า $x_n$ ได้เป็น

$$x_n = \frac{c_n}{u_{nn}}$$

และจากสมการถัดขึ้นไป หาค่า $x_{n-1}$ โดยการแทนค่า $x_n$ ที่ได้จากสมการสุดท้าย และกระทำดังนี้ต่อ

ไป จะได้

$$x_n = \frac{c_n}{u_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{c_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}}$$

$$\vdots$$

$$x_2 = \frac{c_2 - (u_{23}x_3 + u_{24}x_4 + \cdots + u_{2n}x_n)}{u_{22}}$$

$$x_1 = \frac{c_1 - (u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n)}{u_{11}}$$

มีข้อแม้ว่า $u_{ii}$ ทุกตัวต้องไม่เป็นศูนย์ เงื่อนไขจะเป็นดังนี้

1. ถ้า $u_{ii} \neq 0$ ทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, n$ แสดงว่าระบบสมการมีผลเฉลย 1 ชุด
2. ถ้า $u_{ij} = 0$ และ $c_i \neq 0$ สำหรับ $i$ บางค่า และทุกค่า $j \geq i$ แสดงว่าระบบสมการไม่มีผลเฉลย
3. ถ้า $u_{ij} = 0$ และ $c_i = 0$ สำหรับ $i$ บางค่า และทุกค่า $j \geq i$ และไม่มีดังข้อ 2 แสดงว่าระบบสมการมีผลเฉลยจำนวนไม่จำกัด

โดยวิธีการกระทำแบบแถวจะเริ่มจากสดมภ์แรก แล้วเลือกสมาชิกตัวที่ไม่เป็นศูนย์ในสดมภ์ (จะเป็นตัวที่ทำให้สมาชิกอื่นในสดมภ์นั้นเป็นศูนย์) แล้วสลับแถว จากนั้นดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว เพื่อให้เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว แล้วพิจารณาสดมภ์ต่อไปจนกระทั่งครบทุกสดมภ์ ยกตัวอย่าง เช่น พิจารณาระบบสมการ

$$2x + 4y - z = 7$$

$$x + 2y - 2z = -1$$

$$3x - y + z = 4$$

เรามีสมการ 3 สมการและมีตัวแปร 3 ตัว ซึ่งคาดว่าระบบสมการจะมีผลเฉลยเพียงชุดเดียว เขียนเมทริกซ์แต่งเติมได้เป็น

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

เราเขียนชื่อแถวไว้ด้วย เพื่อความสะดวกในการอ้างถึง จุดประสงค์ของเราคือ ต้องการทำให้เมทริกซ์อยู่ในรูปเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว เนื่องจาก $a_{11} \neq 0$ เราสามารถใช้แถวที่หนึ่งไปทำให้สมาชิกในสดมภ์ที่หนึ่งของแถวที่สองและแถวที่สามเป็นศูนย์ กล่าวคือเราดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวดังนี้

$$R_2 := -\frac{R_1}{2} + R_2 \quad \text{หรือเขียนได้เป็น} \quad a_{2j} := -\frac{a_{21}a_{1j}}{a_{11}} + a_{2j},\ j = 1, 2, 3, 4$$

$$R_3 := -\frac{3R_1}{2} + R_3 \quad \text{หรือเขียนได้เป็น} \quad a_{3j} := -\frac{a_{31}a_{1j}}{a_{11}} + a_{3j},\ j = 1, 2, 3, 4$$

หลังจากกระทำแล้วได้เมทริกซ์ดังนี้

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & -1 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & -1.5 & \vdots & -4.5 \\ 0 & -7 & 2.5 & \vdots & -6.5 \end{array}\right]$$

แถวที่หนึ่งจะยังคงเดิม แต่แถวที่สองและสามจะเปลี่ยนไป แถวที่หนึ่งที่เป็นแถวหลักเพื่อให้แถวอื่นๆ เปลี่ยนไปนี้เราเรียกว่า *แถวยืน* (pivotal row) และสมาชิก $a_{11}$ ซึ่งเป็นตัวทำให้สมาชิกตัวอื่นเป็นศูนย์เราเรียกว่า *ตัวยืน* (pivot element) ต่อไปเราต้องการให้สมาชิก $a_{32}$ เป็นศูนย์ ถ้า $a_{22} \neq 0$ เราสามารถให้ $a_{22}$ เป็นตัวยืนเพื่อทำให้ $a_{32}$ เป็นศูนย์ได้ แต่เนื่องจาก $a_{22} = 0$ ดังนั้นเราจึงใช้ $a_{22}$ เป็นตัวยืนไม่ได้ แต่ถ้าเราสลับแถวที่สองและแถวที่สามจะเห็นว่า $a_{22}$ ตัวใหม่ (คือ $a_{32}$ ตัวเดิม) มีค่าไม่เป็นศูนย์ซึ่งจะเป็นตัวยืนตัวใหม่ได้ ดังนั้นเราสลับแถวที่สองกับแถวที่สามได้เมทริกซ์ใหม่เป็น

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & -1 & \vdots & 7 \\ 0 & -7 & 2.5 & \vdots & -6.5 \\ 0 & 0 & -1.5 & \vdots & -4.5 \end{array}\right]$$

ต่อไปให้ $a_{22}$ เป็นตัวยืนเพื่อทำให้ $a_{32}$ เป็นศูนย์ ซึ่งในที่นี้ก็เป็นศูนย์อยู่แล้ว จะเห็นได้ว่าเมทริกซ์ที่ได้เป็นเมทริกซ์เกือบเป็นขั้นบันไดแบบแถว (ทางด้านซ้ายของ : เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน) ซึ่ง $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, 2, 3$ เขียนผลเฉลยโดยการแทนค่าย้อนกลับ ได้ผลเฉลยของระบบสมการเป็น

$$z = \frac{-4.5}{-1.5} = 3$$

$$y = \frac{-6.5 - (2.5)\,z}{-7} = 2$$

$$x = \frac{7 - 4y + z}{2} = 1$$

# 2.4 เทคนิคการเลือกตัวยืน

## 2.4.1 การเลือกตัวยืนบางส่วนและการปรับสเกล

ในการเลือกตัวยืนตามวิธีตัดออกของเกาส์นั้น ตามทฤษฎีแล้วการเลือกแถวใดเป็นแถวยืนไม่มีผลทำให้ผลเฉลยเปลี่ยนแปลงตราบเท่าที่ตัวยืนมีค่าไม่เป็นศูนย์ แต่ในทางปฏิบัติถ้าตัวยืนมีค่าน้อยมากจะทำให้การคำนวณในคอมพิวเตอร์เกิดความคลาดเคลื่อนมาก ซึ่งทำให้ได้ผลเฉลยไม่ถูกต้อง ดังตัวอย่างที่จะแสดงให้เห็นดังนี้

พิจารณาระบบสมการ

$$-0.001x + 1.00y = 1.00$$
$$1.00x + 1.00y = 2.001$$

ระบบสมการนี้มีผลเฉลยเป็น $x = 1.00$ และ $y = 1.001$

ถ้าให้ $a_{11} = -0.001$ เป็นตัวยืน การคำนวณจะเป็นดังนี้

$$\frac{0.001)}{01} = 0$$

$$a_{22} := 1.00 - \frac{(1.00)(1.00)}{-0.001} = 1001$$

$$b_2 := 2.001 - \frac{(1.00)(1.00)}{-0.001} = 1002.001$$

สมมุติว่าการคำนวณกระทำในระบบจำนวนจุดลอยฐานสิบ และใช้ตัวเลขแมนทิสซา $4$ ตำแหน่ง (โดยวิธีการตัด) จะได้ $a_{22} = 0.1001 \times 10^4$ และ $b_2 = 0.1002 \times 10^4$ ดังนั้นสมการใหม่จะเป็น

$$-0.001x + 1.00y = 1.00$$
$$\left(0.1001 \times 10^4\right) y = 0.1002 \times 10^4$$

คำนวณค่า $y$ ได้

$$y = \frac{0.1002 \times 10^4}{0.1001 \times 10^4} = 0.1000 \times 10^1 = 1.00$$

แทนค่า $y$ ในสมการแรก ได้ $x = 0$ จะเห็นว่าผลเฉลยคลาดเคลื่อนมาก

ถ้าเราสลับแถวเป็น

$$1.00x + 1.00y = 2.001$$
$$-0.001x + 1.00y = 1.00$$

ให้ $a_{11}$ เป็นตัวยืน เมื่อคำนวณโดยใช้จำนวนจุดลอยฐานสิบและใช้แมนทิสซา $4$ ตำแหน่งเหมือนเดิม จะได้

$$1.00x + 1.00y = 2.001$$
$$1.001y = 1.002$$

ได้ $y = 1.00$ เมื่อนำไปแทนค่าในสมการแรก จะได้ $x = 1.001$ จะเห็นว่าผลเฉลยที่ได้คลาดเคลื่อนไปเพียงเล็กน้อย

จากตัวอย่างจะเห็นว่าการที่ตัวยืนมีค่าน้อยอาจทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนมาก การแก้ไขอาจทำได้โดยการเลือกตัวยืนเป็นตัวที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดในสดมภ์ เรียกวิธีนี้ว่า *การเลือกตัว*

*ยืนบางส่วน* (partial pivoting) แต่การเลือกตัวยืนที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดในสดมภ์เป็นตัวยืนนั้นยังมีข้อบกพร่อง สมมุติว่าถ้าเราคูณสมการแรกด้วย $-2000$ ระบบสมการจะเป็น

$$2.00x - 2000y = -2000$$

$$1.00x + 1.00y = 2.001$$

ถ้าเลือกตัวยืนตามวิธีดังกล่าวจะได้ $a_{11} = 2.00$ เป็นตัวยืน หากเราคำนวณโดยระบบจำนวนจุดลอยฐานสิบ โดยใช้แมนทิสซา $4$ ตำแหน่งอย่างเดิม ผลที่ได้ก็จะเหมือนครั้งแรก คือได้ผลเฉลยเป็น $x = 0$ และ $y = 1.00$ ซึ่งไม่ถูกต้อง

การแก้ไขที่ทำได้ก็คือ ก่อนที่จะเลือกตัวยืนต้องทำการ *ปรับสเกล* (scaling) เสียก่อน โดยการหารแต่ละแถวด้วยจำนวนที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดในแถวนั้น (ตัวหารต้องไม่อยู่ในสดมภ์ **b**) แล้วจึงดำเนินการเลือกตัวที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดในสดมภ์เป็นตัวยืน วิธีการนี้เรียกว่า *วิธีปรับสเกลและเลือกตัวยืนบางส่วน* (scaled partial pivoting) ในการปรับสเกลเราหาจำนวนที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดในแต่ละแถวคือให้

$$d_i = \max\{|a_{i1}|, |a_{i2}|, \ldots, |a_{in}|\}, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

เรียก $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$ ว่า *เวกเตอร์สเกล* (scale vector) การหารแต่ละแถวด้วย $d_i$ เราหารเฉพาะตัวที่อยู่ในสดมภ์ที่จะเลือกตัวยืน การหาเวกเตอร์สเกลนี้ให้กระทำครั้งแรกครั้งเดียว ไม่ต้องหาใหม่อีกแม้ว่าหลังจากดำเนินการตามแถวแล้วจำนวนในแถวจะมีค่าเปลี่ยนไป การหาเวกเตอร์สเกลใหม่ไม่ได้ช่วยให้ความคลาดเคลื่อนลดน้อยลงเท่าไรนักและไม่คุ้มกับแรงงานที่เพิ่มขึ้น จะยกตัวอย่างเพื่อแสดงการปรับสเกล ดังนี้ เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการคือ

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right] \quad \text{จะได้} \quad \begin{array}{l} d_1 = 4 \\ d_2 = 2 \\ d_3 = 3 \end{array}$$

เวกเตอร์สเกลคือ $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ในสดมภ์แรก หารด้วยจำนวนในเวกเตอร์สเกล ได้ $\frac{2}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{3}$ ได้ว่าอัตราส่วนในแถวที่สามมีค่ามากที่สุด เลือกแถวที่สามเป็นแถวยืน สลับแถว (กับแถวที่หนึ่ง) แล้วดำเนินการต่อ

ไปได้ว่า

$$\left[\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & -1 & \vdots & 7 \\ 1 & 2 & -2 & \vdots & -1 \\ 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \end{array}\right] \overset{R_3 \leftrightarrow R_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccccc} 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \\ 1 & 2 & -2 & \vdots & -1 \\ 2 & 4 & -1 & \vdots & 7 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_3:=R_3-\frac{2}{3}R_1}{\overset{R_2:=R_2-\frac{1}{3}R_1}{\rightarrow}} \left[\begin{array}{ccccc} 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 2.3333 & -2.3333 & \vdots & -2.3333 \\ 0 & 4.6667 & -1.6667 & \vdots & 4.3333 \end{array}\right]$$

เนื่องจาก ค่าสัมบูรณ์ของแถวที่ 3 มากกว่าค่าสัมบูรณ์ในแถวที่ 2 ดังนั้นจึงต้องสลับแถวที่ 2 และ 3 ได้ว่า

$$\overset{R_3 \leftrightarrow R_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccccc} 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 4.6667 & -1.6667 & \vdots & 4.3333 \\ 0 & 2.3333 & -2.3333 & \vdots & -2.3333 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_3:=R_3-\frac{2.3333}{4.6667}R_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccccc} 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 4.6667 & -1.6667 & \vdots & 4.3333 \\ 0 & 0 & -1.5000 & \vdots & -4.4999 \end{array}\right]$$

ได้ผลเฉลยดังนี้

$$z = \frac{-4.4999}{-1.5000} = 2.9999$$

$$y = \frac{4.3333 + 1.6667(2.9999)}{4.6667} = 2.0000$$

$$x = \frac{4 + 2.0000 - 2.9999}{3} = 1.0000$$

วิธีปรับสเกลและเลือกตัวยืนบางส่วนนี้นับว่าเป็นวิธีที่ดี สามารถใช้ได้ดีกับระบบสมการทั่วไปที่มีขนาดไม่ใหญ่เกินไป เราอาจเลือกตัวยืนโดยเลือกจากสมาชิกของเมทริกซ์ที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดเรียกว่า *การเลือกตัวยืนรวม* (total pivoting) วิธีนี้ต้องใช้แรงงานมากและไม่ได้ทำให้ผลเฉลยดีกว่าการเลือกตัวยืนบางส่วนมากนัก เราจึงไม่นิยมใช้

### 2.4.2 วิธีตัดออกโดยเลือกตัวยืนที่มีค่ามากที่สุดในแถว

วิธีนี้เราจะเลือกตัวสัมประสิทธิ์ที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดในแถวเป็นตัวยืน กล่าวคือ เริ่มต้นจากแถวแรกให้เป็นแถวยืน เลือกตัวที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดในแถวให้เป็นตัวยืน ต่อไปดำเนินการตามแถวกับแถวถัดไปเพื่อทำให้สมาชิกในสดมภ์ใต้ตัวยืนเป็นศูนย์ การเลือกตัวยืนในแถวถัดไปก็กระ

ทำเช่นเดียวกัน เมื่อกระทำครบทุกแถวแล้วก็จะเขียนผลเฉลยได้ ตัวอย่างเช่น พิจารณาระบบสมการที่มีเมทริกซ์แต่งเติมเป็น

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & -1 & \vdots & 7 \\ 1 & 2 & -2 & \vdots & -1 \\ 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \end{array}\right]$$

ในแถวที่หนึ่ง มี $a_{12} = 4$ เป็นสมาชิกที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุด เราเลือกเป็นตัวยืน ต่อไปเราดำเนินเบื้องต้นแบบแถวเพื่อให้สมาชิกใต้ตัวยืนเป็นศูนย์ จะได้เมทริกซ์ใหม่เป็น

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & -1 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & -1.5 & \vdots & -4.5 \\ \frac{7}{2} & 0 & 0.75 & \vdots & 5.75 \end{array}\right]$$

ต่อไปในแถวที่สอง เราเลือกสมาชิกที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดคือ $a_{23} = -\frac{3}{2}$ เป็นตัวยืน ดำเนินการกระทำเพื่อให้สมาชิกอื่นใต้ตัวยืนเป็นศูนย์ จะได้เมทริกซ์ใหม่เป็น

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & -1 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & -1.5 & \vdots & -4.5 \\ 3.5 & 0 & 0 & \vdots & 3.5 \end{array}\right]$$

ในแถวที่สามซึ่งเป็นแถวสุดท้าย เขียนผลเฉลยได้เป็น

$$x = \frac{3.5}{3.5} = 1$$

$$z = \frac{-4.5}{-1.5} = 3$$

$$y = \frac{7 - (2)(1) + (1)(3)}{4} = 2$$

เราพบว่า ถ้าสลับสดมภ์ที่หนึ่งกับสดมภ์ที่สองและสลับสดมภ์ที่สองกับสดมภ์ที่สาม จะได้เมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน ผลเฉลยที่เขียนจากเมทริกซ์ที่สลับสดมภ์แล้วนี้จะสลับตัวไม่ทราบค่า ผลเฉลยที่ถูกต้องก็ต้องสลับตัวไม่ทราบค่าย้อนกลับกับการสลับสดมภ์

พิจารณาวิธีปรับสเกลและเลือกตัวยืนบางส่วนเปรียบเทียบกับวิธีเลือกตัวยืนที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดในแถวแบบนี้ วิธีแบบหลังมีข้อดีคือใช้แรงงานน้อยกว่าเพราะว่าไม่ต้องคำนวณการปรับสเกลและไม่ต้องหาจำนวนมากที่สุดในสดมภ์ ส่วนการกระทำอย่างอื่นๆ มีจำนวนการกระทำพอๆ กัน

## 2.5 ระเบียบวิธีซ้ำเดิมของเกาส์-ไซเดล (Gauss-Seidel Iterative Method)

เราได้เคยกล่าวถึงการกระทำซ้ำเดิมในการหาผลเฉลยของสมการที่มีตัวแปรเดียวมาแล้วในบทที่ 2 วิธีการดังกล่าวใช้ได้กับระบบสมการเชิงเส้นที่มีหลายตัวแปรด้วย วิธีการก็จะเป็นแบบเดียวกัน ดังนี้ พิจารณาระบบสมการที่มี $n$ สมการและมี $n$ ตัวแปร ดังนี้

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

ถ้า $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$ เราจัดสมการใหม่ได้เป็น

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\
x_2 &= \frac{b_2 - a_{11}x_1 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{b_n - a_{11}x_1 - \cdots - a_{n(n-1)}x_{n-1}}{a_{nn}}
\end{aligned}
\tag{2.5.1}
$$

เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้นของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ แทนค่าทางขวามือจะได้ค่า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ทางซ้ายมือเป็นค่าใหม่ เรานำค่าที่ได้นี้ไปแทนทางขวามือต่อไปอีกจะได้ค่าใหม่ ทำซ้ำดังนี้เรื่อยๆ จนกระทั่งได้ว่าค่าใหม่ใกล้เคียงกับค่าเดิม ซึ่งแสดงว่าค่าจะลู่เข้าสู่ผลเฉลย หรืออาจเป็นไปได้ว่ามันจะไม่ลู่เข้าสู่ค่าใดเลย

วิธีการดังข้างบนเราเรียกว่า *ระเบียบวิธีซ้ำเดิมของยาโคบี* (Jacobi iteration) ในการแทนค่าวิธีนี้จะใช้ค่าเดิมของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ แทนในทุกสมการ เมื่อครบแล้วจึงใช้ค่าชุดใหม่แทน แต่เราอาจแทนค่าได้อีกวิธีหนึ่ง เรียกว่า *ระเบียบวิธีซ้ำเดิมของเกาส์-ไซเดล* (Gauss-Seidel iterative method) กล่าวคือ เราสามารถแทนค่าทีละสมการ เรากำหนดค่าเริ่มต้น $x_2, \ldots, x_n$ แทนค่าทางขวามือของสมการแรกจะได้ค่า $x_1$ ใช้ค่า $x_1$ ที่ได้ใหม่นี้กับค่า $x_3, \ldots, x_n$ ของเดิมแทนในสมการที่สอง ได้ค่า $x_2$ ต่อไปใช้ค่า $x_1, x_2$ ที่ได้ใหม่กับ $x_4, \ldots, x_n$ ของเดิมแทนในสมการที่สาม จะได้ค่า $x_3$ กระทำดังนี้เรื่อยๆ ไป

การเขียนระบบสมการ (2.5.1) อาจทำได้หลายแบบ เราอาจจะสลับสมการก่อนที่จะเขียนระบบสมการ (2.5.1) หรือเราอาจสลับลำดับของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ก็ได้ เช่นเราอาจหาค่า $x_2$ จากสมการแรก แล้วหา $x_5$ จากสมการที่สอง การเขียนระบบสมการ (2.5.1) ต่างกันมีผลในแง่ที่ว่าทำให้วิธีการได้ค่าที่ลู่เข้าหาผลเฉลยหรือไม่ ถ้าระบบสมการมีผลเฉลยจะมีแบบใดแบบหนึ่งของระบบสมการ (2.5.1) ที่จะได้ค่าลู่เข้าหาผลเฉลย ดังนั้นถ้าหากวิธีการไม่ได้ผลเฉลยเราอาจสลับแถวแล้วเขียนระบบ

สมการ (2.5.1) ใหม่อาจทำให้ได้ค่าที่ลู่เข้าหาผลเฉลยได้ มีข้อแนะนำในการจัดลำดับแถวของระบบสมการ คือพยายามจัดให้สมาชิกบนแนวทแยงหลักมีค่ามากที่สุด เชื่อกันว่าการจัดแบบนี้จะทำให้การลู่เข้าดีขึ้น

**ตัวอย่าง 2.5.1** จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปน เดยระเบยบวธซาเดมของยาโคบีและระเบียบวิธีซ้ำเดิมของเกาส์-ไซเดล

$$3x - y + z = 4$$

$$x - 2y = -3$$

$$x + y - 2z = -3$$

**วิธีทำ** เขียนระบบสมการใหม่ได้ดังนี้

$$x = \frac{4 + y - z}{3}$$
$$y = \frac{3 + x}{2}$$
$$z = \frac{3 + x + y}{2}$$

ให้จุดเริ่มต้นคือ $(0, 0, 0)$

**ระเบียบวิธีซ้ำเดิมของยาโคบี**

**<u>รอบที่ 1</u>**

$$x = \frac{4 + y - z}{3} = \frac{4 + 0 - 0}{3} = 1.33333$$

$$y = \frac{3 + x}{2} = \frac{3 + 0}{2} = 1.5$$

$$z = \frac{3 + x + y}{2} = \frac{3 + 0 + 0}{2} = 1.5$$

ได้จุดใหม่เป็น $(1.33333, 1.5, 1.5)$

**<u>รอบที่ 2</u>**

$$x = \frac{4 + y - z}{3} = \frac{4 + 1.5 - 1.5}{3} = 1.33333$$

$$y = \frac{3 + x}{2} = \frac{3 + 1.33333}{2} = 2.16667$$

$$z = \frac{3 + x + y}{2} = \frac{3 + 1.33333 + 1.5}{2} = 2.16667$$

ได้จุดใหม่เป็น $(1.33333, 2.16667, 2.16667)$

**รอบที่ 3**

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+2.16667-2.16667}{3} = 1.33333$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+1.33333}{2} = 2.16667$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+1.33333+2.16667}{2} = 3.25$$

ได้จุดใหม่เป็น $(1.33333, 2.16667, 3.25)$

**รอบที่ 4**

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+2.16667-3.25}{3} = 0.97222$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+1.33333}{2} = 2.16666$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+1.33333+2.16667}{2} = 3.25$$

ได้จุดใหม่เป็น $(0.97222, 2.16666, 3.25)$

**รอบที่ 5**

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+2.16666-3.25}{3} = 0.97222$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+0.97222}{2} = 1.98611$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+0.97222+2.16666}{2} = 3.06944$$

ได้จุดใหม่เป็น $(0.97222, 1.98611, 3.06944)$

**รอบที่ 6**

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+1.98611-3.06944}{3} = 0.97222$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+0.97222}{2} = 1.98611$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+0.97222+1.98611}{2} = 2.97916$$

ได้จุดใหม่เป็น $(0.97222, 1.98611, 2.97916)$

**รอบที่ 7**

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+1.98611-2.97916}{3} = 1.00232$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+0.97222}{2} = 1.98611$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+0.97222+1.98611}{2} = 2.97916$$

ได้จุดใหม่เป็น $(1.00232, 1.98611, 2.97916)$

**รอบที่ 8**

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+1.98611-2.97916}{3} = 1.00232$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+1.00232}{2} = 2.00116$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+1.00232+1.98611}{2} = 2.99422$$

ได้จุดใหม่เป็น $(1.00232, 2.00116, 2.99422)$

ซึ่งพบว่าลู่เข้าสู่ผลเฉลย $(1, 2, 3)$

**ระเบียบวิธีซ้ำเดิมของเกาส์-ไซเดล**

**รอบที่ 1**

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+0-0}{3} = 1.33333$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+1.33333}{2} = 2.16667$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+1.33333+2.16667}{2} = 3.25$$

ได้จุดใหม่เป็น $(1.33333, 2.16667, 3.25)$

**รอบที่ 2**

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+2.16667-3.25}{3} = 0.97222$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+0.97222}{2} = 1.98611$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+0.97222+1.98611}{2} = 2.97916$$

ได้จุดใหม่เป็น $(0.97222, 1.98611, 2.97916)$

**รอบที่ 3**

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+1.98611-2.97916}{3} = 1.00232$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+1.00232}{2} = 2.00116$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+1.00232+2.00116}{2} = 3.00174$$

ได้จุดใหม่เป็น $(1.00232, 2.00116, 3.00174)$

**รอบที่ 4**

$$x = \frac{4+y-z}{3} = \frac{4+2.00116-3.00174}{3} = 0.99981$$

$$y = \frac{3+x}{2} = \frac{3+0.99981}{2} = 1.99990$$

$$z = \frac{3+x+y}{2} = \frac{3+0.99981+1.99990}{2} = 2.99986$$

ได้จุดใหม่เป็น $(0.99981, 1.99990, 2.99986)$
จะพบว่าลู่เข้าสู่ผลเฉลย $(1, 2, 3)$ ซึ่งลู่เข้าเร็วกว่าระเบียบวิธีซ้ำเดิมของยาโคบี

## 2.6 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงเขียนผลเฉลย (ถ้ามี) จากเมทริกซ์แต่งเติม $[A : \mathbf{b}]$ ขั้นสุดท้ายต่อไปนี้

1.1 $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ 1.2 $\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

1.3 $\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right]$ 1.4 $\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$

2. จงเขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการต่อไปนี้และจงดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวจนกระทั่งได้เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูปแล้วจึงเขียนผลเฉลย

2.1

$$x - y - z = 2$$

$$2x - 2y + z = 7$$

$$x + y + 4z = 3$$

2.2

$$x + 2y + 2z = -3$$

$$2x + y - z = 2$$

$$-x + y + z = 2$$

3. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ โดยใช้วิธีการเลือกตัวยืนบางส่วน และวิธีปรับสเกลและเลือกตัวยืนบางส่วน

3.1

$$2x - 3y - z = -2$$

$$2x + y - 2z = 6$$

$$x + y - 5z = 4$$

3.2

$$2x - y + z = 3$$

$$x - 2y + 2z = 2$$

$$x + 2y - z = 1$$

3.3

$$3x - y - z = 3$$

$$x + 2y + z = 1$$

$$2x - 2y - 2z = 1$$

3.4

$$x + 2y + 2z = -3$$

$$2x + y - z = 2$$

$$-x + y + z = 2$$

3.5

$$x - y - z = 2$$

$$2x - 2y + z = 7$$

$$x + y + 4z = 3$$

4. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ โดยใช้วิธีตัดออกโดยเลือกตัวยืนที่มีค่ามากที่สุดในแถว

4.1

$$x - 2y - z = 1$$

$$2x - 2y + z = 5$$

$$x + 3y - z = 1$$

4.2

$$x + y + 3z = 5$$
$$x - 2y + 3z = -1$$
$$3x + y + z = 3$$

5. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีซ้ำเดิมของยาโคบีและระเบียบวิธีซ้ำเดิมของเกาส์-ไซเดล

5.1

$$3x - 2y + z = 0$$
$$3y + 2z = 1$$
$$3x + y - 2z = 6$$

5.2

$$x + y + 3z = 5$$
$$x - 2y + 3z = -1$$
$$3x + y + z = 3$$

5.3

$$3x - y + 2z = 3$$
$$x + y + z = 4$$
$$x - 2y - z = -2$$